NÁRODNÍ ÚSTAV
PRO VZDĚLÁVÁNÍ
divize VÚP

Matematická gramotnost ve výuce

METODICKÁ PŘÍRUČKA

Matematická gramotnost ve výuce

metodická příručka

Národní ústav pro vzdělávání, školské poradenské zařízení a zařízení pro další vzdělávání pedagogických pracovníků (NÚV), divize VÚP

2011

Matematická gramotnost ve výuce
metodická příručka

Kolektiv autorů:
Mgr. Katarína Nemčíková
PhDr. Věra Olšáková
PhDr. Filip Roubíček, Ph.D.
Vladislav Tomášek
Mgr. Jana Vaňková
RNDr. Eva Zelendová

Recenzent:
doc. RNDr. Josef Molnár, CSc.

Vydal:	Národní ústav pro vzdělávání, školské poradenské zařízení a zařízení pro další vzdělávání pedagogických pracovníků (NÚV), divize VÚP
Grafické zpracování:	Jindřich Jindřich
Jazyková korektura:	Jan Klufa
Vydání:	první, Praha 2011
ISBN:	978-80-87000-97-7

Obsah

1 Úvodní slovo

Matematická gramotnost v současné společnosti

Naše školství prošlo v posledních desetiletích řadou reforem. Ponechejme nyní stranou otázky, zda byly tyto reformy vždy nutné, řádně připravené a zda byly jejich výsledky náležitě vyhodnoceny.

Skutečností je, že školství jako celek se proměňuje, mění se jeho postavení a vliv ve společnosti, mění se žáci, vyučovací metody i postavení jednotlivých předmětů ve vzdělávací soustavě. A ve školství snad ještě více než v jiných oblastech našeho života platí, že skutečné výsledky a dopady mnoha změn se projeví až po letech. I proto je náprava chyb a omylů leckdy zdlouhavá a obtížná.

Naštěstí se, byť pomalu, společenské vnímání role školy a vzdělání mění k lepšímu. Řada signálů, mezi něž patří i výsledky našich žáků v mezinárodních srovnáváních (TIMSS a PISA), dostatečně výrazně naznačuje, že dosavadní vývoj si vyžaduje zásadnější korekce. V těchto souvislostech se mění i názory na postavení matematiky a na stav matematické gramotnosti našich dětí. Doufejme, že končí doba, kdy byla její role podceňována a v „intelektuální" společnosti téměř patřilo k dobrému tónu zdůrazňování toho, jak dotyčný nikdy matematiku nezvládal. Zlepšení matematické gramotnosti se dnes dostává na pořad i v místech, kde se rozhoduje o dalším směřování naší společnosti.

Role učitele je v této situaci velmi obtížná. Pokud učitel není ochoten své poslání degradovat na řemeslné „odučení" vyučovacích hodin a má snahu žáky zaujmout a upoutat, opravdu je vychovávat a vzdělávat v pravém významu těchto slov, musí se vyrovnat nejen se zmíněnými tlaky vnějšího prostředí, ale musí ovládat řadu dalších činností a dovedností, které přinesla moderní společnost s neustále se vyvíjejícími novými technologiemi. A tak by učitel dnes měl nejen znát své aprobační předměty a mít hlubší vhled i do dalších předmětů, aby mohl kvalifikovaně ve výuce uplatňovat „mezipředmětové vztahy", ale měl by zvládat práci na počítači, připravovat si působivé prezentace, chystat si výuku nejen pro „klasickou" práci ve třídě, ale mít i speciální přípravy pro práci s interaktivní tabulí. Učitel matematiky i na základní škole by samozřejmě měl ovládat i matematický software, který se ve výuce stále běžněji využívá (GeoNext, Cabri, GeoGebra aj.).

Ani v nejmenším si nepřeji, aby předcházející řádky vyzněly pesimisticky. Učitelská profese je krásná a povznášející. Pouze jsem chtěl zdůraznit, že je mimořádně náročná a v naší společnosti mnohdy nedoceňovaná (čímž nemám na mysli pouze ohodnocení finanční).

Společným úkolem nás, učitelů matematiky, je být na budoucnost připraveni a prokázat, že jsme schopni svůj předmět vyučovat tak, aby matematika nepatřila mezi předměty neoblíbené, aby žáci pochopili, že matematika není jen souborem vzorců a pouček, které se ve škole nabiflují, aby je po opuštění školy mohli zase co nejrychleji zapomenout, ale že je mocným nástrojem v poznávání světa, který jim usnadní řešení úkolů, které je čekají v praktickém životě.

Jsem přesvědčen, že většina učitelů vykonává své povolání s láskou a v uvedeném duchu své žáky připravuje. Současně si však myslím, že každý učitel přivítá různé nástroje, pomůcky, náměty a další impulzy, které mu jeho práci usnadní, pomohou mu v přípravě vyučování, projektů, námětů pro samostatnou práci žáků atd. Metodická podpora, kterou učitelé najdou na následujících stránkách, takovou pomůckou bezesporu je. Kvalifikovaný rozbor typických úloh z mezinárodních srovnávání s ukázkami žákovských řešení, které jsou doplněny podrobným komentářem, může řadě učitelů výrazně pomoci při přípravě žáků. **Žáci při řešení těchto úloh prokazují, zda zvládají komplex činností a znalostí, který nazýváme matematická gramotnost.** Proto doufám, že tyto materiály řada učitelů ve své školské praxi opravdu využije.

doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.

Předseda Společnosti
učitelů matematiky JČMF

2 Vymezení pojmu matematická gramotnost

Výsledky mezinárodních výzkumů PISA a TIMSS dokládají výrazné zhoršení českých žáků v matematice. Jak by mohl učitel při hodinách matematiky postupovat, jaké metody práce a jaké úlohy pro žáky volit, aby se úroveň jejich matematické gramotnosti zvýšila? Odpověď je třeba hledat ve správném pochopení pojmu matematická gramotnost. Učitel matematiky by měl velmi dobře vědět, co se pod pojmem matematická gramotnost skrývá, jaké „matematické kompetence“ by měl u svých žáků rozvíjet. Na základě tohoto pochopení potom volí vhodnou vyučovací metodu a vhodné úlohy, které při vyučování bude využívat.

Než se některými metodami vhodnými pro rozvoj matematické gramotnosti budeme podrobněji zabývat, připomeňme si, jak je pojem matematická gramotnost vymezený v publikaci Gramotnosti ve vzdělávání, vydané v roce 2010[1]:

Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.

Úroveň matematické gramotnosti se projeví, když jsou matematické znalosti a dovednosti používány k vymezení, formulování a řešení problémů z různých oblastí a kontextů a k interpretaci jejich řešení s užitím matematiky. Tyto kontexty sahají od čistě matematických až k takovým, ve kterých není matematický obsah zpočátku zřejmý a je na řešiteli, aby ho v nich rozpoznal. Je třeba zdůraznit, že uvedené vymezení se netýká pouze matematických znalostí na určité minimální úrovni, ale jde v něm o používání matematiky v celé řadě situací, od každodenních a jednoduchých až po neobvyklé a složité.

Tři složky matematické gramotnosti:

1. **situace a kontexty**, do nichž jsou zasazeny problémy, které mají žáci řešit a aplikovat tak získané vědomosti a dovednosti:

Používání a uplatňování matematiky v rozmanitých situacích (např. osobní, vzdělávací/pracovní, veřejné a vědecké) a kontextech (autentický, hypotetický) je důležitým aspektem matematické gramotnosti.

2. **kompetence**, které se uplatňují při řešení problémů:

Matematické uvažování

Zahrnuje schopnost klást otázky charakteristické pro matematiku („Existuje...?“, „Pokud ano, tak kolik?“, „Jak najdeme...?“), znát možné odpovědi, které matematika na tyto otázky nabízí, rozlišovat příčinu a důsledek, chápat rozsah a omezení daných matematických pojmů a zacházet s nimi.

---

[1] *Gramotnosti ve vzdělávání. Příručka pro učitele.* Praha : Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2010, s. 22. Dostupné z WWW: <http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2010/02/Gramotnosti-ve-vzdělávání1.pdf>.

Matematická argumentace
Zahrnuje schopnost rozlišovat předpoklady a závěry, sledovat a hodnotit řetězce matematických argumentů různého typu, cit pro heuristiku („Co se může nebo nemůže stát a proč?“), schopnost vytvářet a posuzovat matematické argumenty.

Matematická komunikace
Zahrnuje schopnost rozumět písemným i ústním matematickým sdělením a vyjadřovat se jednoznačně a srozumitelně k matematickým otázkám a problémům, a to ústně i písemně.

Modelování
Zahrnuje schopnost porozumět matematickým modelům reálných situací, používat, vytvářet a kriticky je hodnotit; získané výsledky interpretovat a ověřovat jejich platnost v reálném kontextu.

Vymezování problémů a jejich řešení
Zahrnuje schopnost rozpoznat a formulovat matematické problémy a řešit je různými způsoby.

Užívání matematického jazyka
Zahrnuje schopnost rozlišovat různé formy reprezentace matematických objektů a situací, volit formy reprezentace vhodné pro danou situaci a účel; dekódovat a interpretovat symbolický a formální jazyk, chápat jeho vztah k přirozenému jazyku, pracovat s výrazy obsahujícími symboly, používat proměnné a provádět výpočty.

Užívání pomůcek a nástrojů
Zahrnuje znalost různých pomůcek a nástrojů (včetně prostředků výpočetní techniky), které mohou pomoci při matematické činnosti, a dovednost používat je s vědomím hranic jejich možností.

3. **matematický obsah** tvořený strukturami a pojmy nutnými k formulaci matematické podstaty problémů:

kvantita
význam čísel, různé reprezentace čísel, operace s čísly, představa velikosti čísel, počítání zpaměti a odhady, míra;

prostor a tvar
orientace v prostoru, rovinné a prostorové útvary, jejich metrické a polohové vlastnosti, konstrukce a zobrazování útvarů, geometrická zobrazení;

změna a vztahy
závislost, proměnná, základní typy funkcí, rovnice a nerovnice, ekvivalence, dělitelnost, inkluze; vyjádření vztahů symboly, grafy, tabulkou;

neurčitost
sběr dat, analýza dat, prezentace a znázorňování dat, pravděpodobnost a kombinatorika, vyvozování závěrů.

3 Metodická doporučení pro rozvoj matematické gramotnosti s využitím listů matematických úloh

Každý učitel matematiky má vytipované matematické úlohy, které s oblibou zadává svým žákům. Našli bychom mezi nimi zvláště ty úlohy, které nabízejí žákům víc cest, jak dojít ke správnému výsledku, nebo úlohy, které ke svému vyřešení potřebují nestandardní postupy. Jak takové úlohy efektivně ve výuce využívat? Kde další takové úlohy hledat? Jak podobné úlohy tvořit? Pokusíme se na tyto otázky nalézt odpověď a formulovat jednoduchá obecná metodická doporučení.

3.1 Efektivita vyučovacího procesu

Metodické doporučení 1

Efektivita vyučovacího procesu závisí na správném vytyčení cílů i obsahu, dále pak i na způsobech, jak těchto cílů dosáhnout, tj. na vhodné volbě metody výuky, organizační formy a materiálních prostředků, které má učitel k dispozici[2].

Chápejme cíl matematického vzdělávání jako rozvoj matematické gramotnosti žáků. Vzhledem k omezenému rozsahu této publikace byly za metody výuky, které jsou úspěšně využívány k naplňování tohoto cíle, vybrány pouze **metody slovní** s důrazem na problémový (heuristický) rozhovor. Proto, aby učitel efektivně tyto metody využíval ve výuce matematiky, je třeba, aby porozuměl nejenom jejich didaktickému aspektu, ale i dalším souvislostem, mezi které patří: souvislost s Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (RVP ZV), souvislost s vymezením pojmu matematická gramotnost, dovednosti potřebné pro řešení úlohy různými způsoby apod.

Dobrým pomocníkem při této nelehké práci mohou být tzv. **listy matematických úloh**, které si učitel během svého pedagogického působení pro své „oblíbené úlohy" vytvoří. Souhrn důležitých informací je vhodné v těchto listech doplnit ukázkami různých žákovských řešení. Než si konkrétní podobu listů pro **uvolněné úlohy** z mezinárodních výzkumů v následující kapitole představíme, věnujme se podrobněji zvýrazněným klíčovým pojmům.

3.2 Metody slovní

V pedagogické literatuře se setkáváme s řadou klasifikací základních skupin metod výuky. Jednou z nich je i Komplexní klasifikace základních skupin metod výuky (Maňák, 1990)[3], kde v oddíle Metody z hlediska pramene poznání a typu poznatků – aspekt didaktický nalezneme i metody slovní, mezi které jsou zařazeny:

- monologické metody (přednáška, výklad, vyprávění, vysvětlování, instruktáž), které jsou založené na využívání souvislého mluveného projevu jednotlivce – učitele nebo žáka;

[2] VALIŠOVÁ, A., KASÍKOVÁ, H. *Pedagogika pro učitele*. Praha : Grada, 2007, s. 189.
[3] KALOUS, Z., OBST, O. *Školní didaktika*. Praha : Portál, 2002, s. 313.

- dialogické metody (rozhovor, diskuse, dramatizace), založené především na činnostním principu rozhovoru;
- metoda písemných prací;
- metoda práce s učebnicí, knihou, textem.

Při rozvíjení matematické gramotnosti žáků učitel využívá všechny uvedené metody, větší důraz by měl však klást na metody dialogické, přestože příprava na ně je pro něj velmi náročná. Dialogické metody totiž vyžadují, aby byl učitel připraven na *„operativní" použití dialogu, v němž je však stále respektován obecně stanovený cíl*[4] (v našem případě rozvoj všech kompetencí uvedených ve vymezení pojmu matematická gramotnost).

Metodické doporučení 2

Stěžejní význam pro rozvoj matematické gramotnosti má problémový (heuristický) rozhovor, jehož hlavním cílem je naučit žáky řešit problémy a rozvíjet jejich myšlení a tvořivost. První část heuristického rozhovoru můžeme naznačit pomocí jednoduchých otázek: V čem je problém? Čeho chceme dosáhnout? Co na to potřebujeme? Existuje jen jedna cesta ke správnému řešení? Kterou cestu vybereme? V další části rozhovoru probíhá vlastní realizace řešení (i v této fázi může učitel ovlivňovat žáka dobře volenými otázkami), na závěr nesmí chybět vyhodnocení žákova řešení.

3.3 Listy matematických úloh

Příprava učitele na slovní vyučovací metody je časově náročná. Zvláště pak, připravuje-li učitel vlastní úlohu, kterou chce „ušít svým žákům přímo na tělo". Práce a čas, který učitel do přípravy vloží, jsou však zúročeny efektivním využitím vyučovací jednotky bez zásadních didaktických chyb.

Metodické doporučení 3

Jednou z možností zaznamenání všech důležitých podkladů podnětné matematické úlohy je strukturovaný záznam, tzv. list matematické úlohy. Jednotná struktura umožní učiteli matematiky rychle se v rozsáhlejším textu orientovat a doplňovat do něj nové poznatky získané přímou vyučovací činností.

Úvodní část listu matematické úlohy musí obsahovat **zadání úlohy** a **správnou odpověď**. **Dovednosti potřebné pro řešení úlohy** pomohou učiteli začlenit zadanou úlohu do kontextu školního vzdělávacího programu. Pomohou mu lépe stanovit, ve které fázi vzdělávacího procesu může úlohu se svými žáky řešit. Nejobsáhlejší část listu matematické úlohy tvoří **metody řešení** (popis metody, rozbor žákovských řešení, ukázky ze žákovských řešení). Hlavní význam této části listu úlohy shrnuje následující metodické doporučení.

[4] VALIŠOVÁ, A., KASÍKOVÁ, H. *Pedagogika pro učitele*. Praha : Grada, 2007, s. 200.

Metodické doporučení 4

Ke správnému výsledku zadané úlohy nemusí vést jen jedna cesta, jen jedno řešení. Učitel, který se připravuje využít slovní vyučovací metody (zvláště pak heuristický rozhovor), by si tuto skutečnost měl velmi dobře uvědomit. Jinak by mohlo dojít k závažné chybě, která je v české pedagogické literatuře označována jako „trychtýřování“.

Termín „trychtýřování“ (funneling pattern) metaforicky odkazuje na situaci, kdy učitel začíná u obecně formulované otázky a tu postupně nahrazuje sérií stále úžeji zaměřených otázek (proto je v překladu originálu použito slovo trychtýř). Otázky jsou většinou zjišťovací a dají se zodpovědět jen jednoslovnou odpovědí ano či ne, popřípadě velmi krátkou odpovědí. Často si učitel také odpoví sám. Dílčí otázky žáci už zpravidla zodpovědět umějí, ale to neznamená, že chápou, kam otázky směřují[5]. K „trychtýřování“ dochází velmi často tehdy, když se učitel snaží žáky vtáhnout do řešení úlohy, ti však nereagují, nevědí jak začít, a učitel se jim snaží poradit. Tato situace může při využívání úloh větší obtížnosti velmi lehce nastat.

Metodické doporučení 5

Různé metody, které žáci při řešení úlohy využili, pomohou učiteli matematiky ujasnit si, kterými směry se mohou žáci při řešení ubírat. Mohou mu pomoci neupínat se při řízeném heuristickém rozhovoru pouze na jednu metodu řešení. Shromažďování různých řešení jedné zadané úlohy by tedy mělo patřit k dobré praxi každého učitele během celé jeho pedagogické činnosti.

Zařazení další části listu úlohy **naplňování výstupů RVP ZV** a **spojitost s jednotlivými složkami vymezení matematické gramotnosti** může působit jako formalita. Umožní však učiteli nadhled ve smyslu propojení očekávaných výstupů RVP ZV a jednotlivých „matematických kompetencí“. **Úlohy s obdobnou tematikou**, které učitel může převzít z různých sbírek matematických úloh (např. Netradiční úlohy ve výuce matematiky[6], kterou vydal Výzkumný ústav pedagogický v Praze v elektronické podobě v roce 2009) nebo z mezinárodních výzkumů PISA a TIMSS (viz publikace Ústavu pro informace ve vzdělávání[7]), dotvářejí rámec zasazení dané úlohy do vzdělávacího procesu. **Možnosti využití úlohy ve výuce** stručně shrnují, při kterých příležitostech v hodinách matematiky může učitel uvolněnou úlohu využít. K zapojení žáků do řešení problémů pomohou **pracovní listy pro žáky** – připravené materiály je možné použít ve výuce matematiky, jak ke společné, tak k samostatné práci žáků.

Metodické doporučení 6

List matematické úlohy by měl obsahovat tyto části:

- zadání úlohy
- správnou odpověď
- dovednosti potřebné pro řešení úlohy

---

[5] STEHLÍKOVÁ, N. *Užití podnětných úloh v matematice*. In *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2010*. Plzeň : Vydavatelský servis, 2010, s. 239–240.

[6] HOUSKA, J. *Netradiční úlohy ve výuce matematiky*. Metodický portál: Články [online]. 18. 02. 2009, [cit. 2011-06-08]. Dostupné z WWW: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVB/3002/NETRADICNI-ULOHY-VE-VYUCE-MATEMATIKY.html>.

[7] http://www.uiv.cz/rubrika/205

- popis metod řešení úloh
- ukázky žákovských řešení s jejich rozborem
- naplňování výstupů z RVP ZV
- spojitost s jednotlivými složkami vymezení matematické gramotnosti
- úlohy s obdobnou tematikou
- možnosti využití úlohy ve výuce
- pracovní listy pro žáky

3.4 Uvolněné úlohy

Rozvíjet matematickou gramotnost vhodnou metodou bez vhodného obsahu nelze. Často se mezi pedagogickou veřejností diskutuje, jaké typy úloh jsou pro rozvoj matematické gramotnosti nejlepší. Učitelé se vesměs shodují v tom, že se nemůže jednat jen o rutinní úlohy nejnižší obtížnosti. Proto je třeba, aby žákům byly předkládány úlohy, které splňují určitá kritéria.

Vzorovými úlohami pro učitele mohou být úlohy uvolněné z mezinárodních výzkumů PISA a TIMSS. Tyto uvolněné úlohy se ve výzkumu již nepoužívají k měření výsledků žáků, a proto je možné je využít ve výuce. Řadu zajímavých uvolněných úloh lze nalézt v publikaci Take the Test[8] přímo na stránkách OECD Programu pro mezinárodní hodnocení žáků PISA (Programme for International Student Assessment)[9], v českém překladu jsou některé uvolněné úlohy z výzkumů PISA a TIMSS zveřejněny na stránkách Ústavu pro informace ve vzdělávání www.uiv.cz. U těchto zveřejněných úloh bývá kromě zadání a správné odpovědi uvedena např. úspěšnost našich žáků v mezinárodním měřítku nebo jedna z metod řešení úlohy. Díky zpracování uvolněných úloh formou listů jsou v této publikaci u jednotlivých úloh uvedeny další důležité informace (viz metodické doporučení 6).

Uvolněné úlohy poskytují učitelům dvě velké výhody. První výhodou je přesná formulace úlohy, která zajistí, že u žáků zřídka dochází k nejasnostem v pochopení textu. V době, kdy čtenářská gramotnost českých žáků nedosahuje požadované úrovně, je správná a jednoduchá formulace textu důležitá pro rozvíjení matematické komunikace žáků.

Metodické doporučení 7

Jestliže se učitel blíže seznámí s větším množstvím úloh uvolněných z mezinárodních výzkumů, nečiní mu potíže vytvářet úlohy vlastní, ve kterých může zachytit skutečnosti blízké jeho žákům jazykem, kterému žáci rozumějí.

Druhou výhodou je grafické zpracování úlohy. Text je obvykle doprovázen vhodnou ilustrací či fotografií, tabulkou nebo grafem, které při řešení pomáhají využívat všeobecné psychologické aspekty vizualizace. *Člověk sice má neomezenou schopnost si*

[8] *Take the Test. Sample Questions from OECD's PISA Assessments*. OECD, 2009. ISBN 9789264050808. Většina úloh z této publikace byla zveřejněna v češtině: *Netradiční úlohy. Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA*. Praha : ÚIV, 2006. ISBN 80-211-0522-4.
[9] http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/47/23/41943106.pdf

pamatovat, ovšem pouze omezenou tzv. aktivní paměť, kterou při učení nedokáže překročit. Učí-li se člověk nějaký nový abstraktní pojem, velkou část své aktuální paměťové kapacity spotřebovává na představování si dané situace, na které učitel pojem vysvětluje. Slabší žáci tuto kapacitu snadno vyčerpají, takže již nejsou schopni intenzivně přemýšlet. Vizualizace pomáhá část aktuální paměti uvolnit ve prospěch dalších mentálních činností (jako je indukce, abstrakce, komparace, dedukce, symbolizace apod.). Dítě je tedy schopno podat lepší výkon. Lepším žákům pomáhá vizualizace také, mohou více své mozkové kapacity věnovat na ověřování hypotéz, hledání dalších řešení, mohou si dovolit být kreativnější a více experimentovat.[10]

Metodické doporučení 8

Otázka názornosti je ve školách aktuální zejména při dvou příležitostech, které spolu souvisejí. Jednak jde o ***názornost při zavádění pojmů****, jednak o* ***názornost při řešení úloh***[11].

Pro ukázkové zpracování listů uvolněných úloh pro účely této publikace bylo vybráno pět úloh z mezinárodního výzkumu PISA, které dosud nebyly publikovány v českém překladu: Rozloha kontinentu, Zkroucený dům, Srdeční tep, Pohyblivý chodník a Maják. Zadání těchto úloh v originálním znění lze nalézt v již zmíněné publikaci Take the Test.

Podkladem pro zpracování nejobsáhlejší části listů uvolněných úloh (části, která se týká metod řešení úlohy) byla analýza vyplněných pracovních listů 150 patnáctiletých žáků, kterým byly tyto úlohy zadány ve školním roce 2009/2010. Takto získané ukázky různých metod řešení simulovaly autentické shromažďování různých metod řešení jedné zadané úlohy během pedagogické praxe učitele (viz metodické doporučení 5).

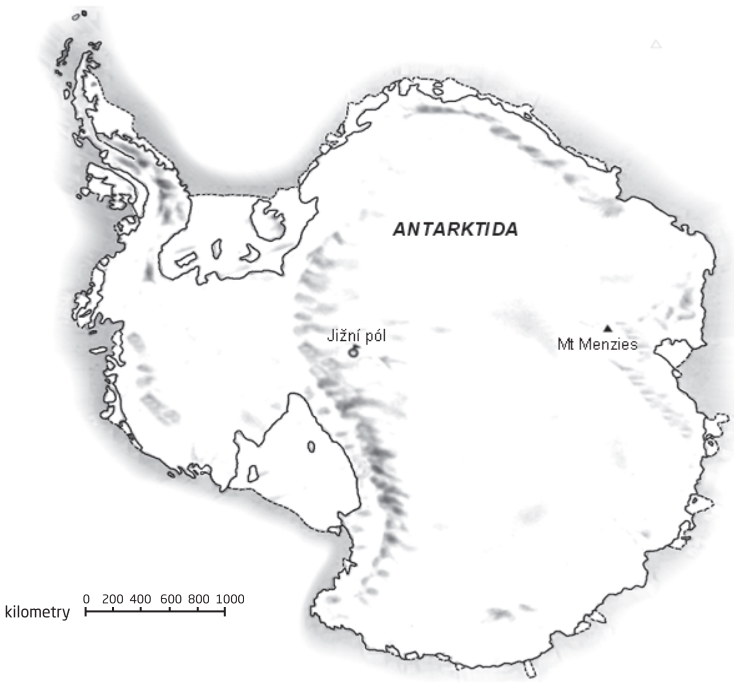
[10] VANÍČEK, J. *Psychologické aspekty kognitivních technologií ve vyučování matematiky*. Dostupné z WWW: http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_mat/externi/kat_mat_9782/k12.htm#vi.
[11] KUŘINA, F. *Umění vidět v matematice*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1989, s. 37.

4 Listy uvolněných úloh

4.1 Rozloha kontinentu

Užitím měřítka mapy odhadni rozlohu Antarktidy.

Zapiš postup a vysvětli, jak odhad provádíš. (Jestliže ti to pomůže při tvém odhadu, můžeš na mapu kreslit.)



Správná odpověď

Odhad rozlohy Antarktidy mezi 12 000 000 km^2 a 18 000 000 km^2 byl ve výzkumu PISA hodnocen jako správná odpověď.

Dovednosti potřebné pro řešení úlohy

Pojmové uchopení úlohy:

Žák:
- chápe pojem rozloha jako obsah (nikoliv jako obvod nebo objem);
- chápe pokyn „odhadni" jako provedení výpočtu s přibližnými hodnotami.

Volba metody odhadu:

Žák určuje obsah nepravidelného obrazce:

- pomocí čtvercové sítě nebo pokrytím obrazce jednotkovými čtverci;
- rozdělením obrazce na několik jednodušších obrazců, jejichž obsah umí určit (např. obdélníků);
- nahrazením obrazce jedním jednodušším obrazcem, který ho přibližně pokrývá a jehož obsah umí vypočítat (např. čtvercem, obdélníkem, kruhem), případně metodou rámování.

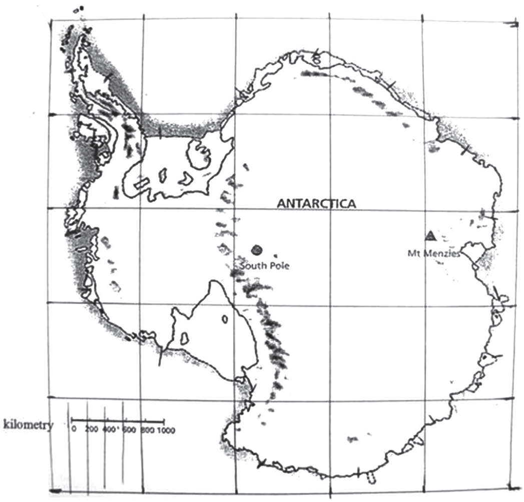
Provedení odhadu:

Žák:

- načrtává nebo rýsuje základní geometrické útvary (rovnoběžky, kolmice, čtverec, obdélník, kruh);
- určuje rozměry obrazce měřením (délky stran, poloměr kruhu);
- určuje rozměry obrazce ve skutečnosti pomocí měřítka mapy;
- počítá obsah základních rovinných útvarů (čtverce, obdélníku, trojúhelníku, lichoběžníku, kruhu), provádí základní početní operace;
- používá správné jednotky (délky, obsahu).

Metody odhadu

1. Odhad rozlohy pomocí jednotkové čtvercové sítě



Popis metody

Zakreslíme čtvercovou síť (viz žákovské řešení), přičemž délku strany jednotkového čtverce volíme podle uvedeného měřítka, tj. délka úsečky odpovídající 1 000 km ve skutečnosti. Určíme, kolik jednotkových čtverců pokrývá plochu kontinentu. Rozlohu vypočteme jako součin obsahu jednotkového čtverce (1 000 000 km^2) a počtu jednotkových čtverců (přibližně 14 čtverců). Odhad tedy činí 14 000 000 km^2.

Rozbor žákovských řešení

Žák:

1) zvolil stranu jednotkového čtverce. Naznačil, načrtnul nebo narýsoval čtvercovou síť;
   poznámka: pokud žák volil nevhodnou délku strany jednotkového čtverce (menší než 3 cm), většinou nestihl síť dokreslit a úlohu nedořešil nebo chyboval ve výpočtu obsahu jednotkového čtverce;
2) určil počet jednotkových čtverců; „neúplné" čtverce spojil na celé;
3) určil obsah jednotkového čtverce; vypočítal rozlohu.

Poznámka: Někteří žáci chybovali v převodu jednotek obsahu nebo počítali namísto s obsahem čtverce s jeho obvodem.

Vybráno ze žákovských řešení

Načrtla jsem síť a pokusila jsem se vypočítat odhad, ale nestihla jsem to.

Rozdělil jsem si to na čtverečky 1 000 × 1 000 kilometrů a spočítal je. Ze začátku jsem to dělal pomocí obvodu, ale nevyšlo to hezky.

Mapu přesunu na čtverečkovanou síť. 1 čtvereček bude mít 6 × 6 mm. Spočítám veškeré čtverce, které obsahují obvod Antarktidy, a také čtverce v ploše Antarktidy, které se obvodu nedotýkají. Pak vše dosadím do vzorce, který si nepamatuji.

Chtěla jsem tam udělat čtverečky o rozloze 200 km^2 a spočítat je. Lépe by se to ale dělalo, kdyby měla Antarktida tvar čtverce.

2. Odhad rozlohy pomocí pokrytí plochy jednotkovými čtverci (dláždění)

Popis metody

Plochu pokryjeme jednotkovými čtverci, případně jejich částmi – metoda dláždění (čtverce nemusejí tvořit síť). Délku strany jednotkového čtverce volíme podle uvedeného měřítka, tj. délka úsečky odpovídající 1 000 km ve skutečnosti. Určíme, kolik jednotkových čtverců potřebujeme k pokrytí plochy kontinentu. Rozlohu vypočteme jako součin obsahu jednotkového čtverce (1 000 000 km^2) a počtu jednotkových čtverců (přibližně 14 čtverců). Odhad tedy činí 14 000 000 km^2.

Rozbor žákovských řešení

Žák:

1) zvolil stranu jednotkového čtverce a načrtnul pokrytí plochy čtverci;
2) určil počet jednotkových čtverců;
3) určil obsah jednotkového čtverce. Vypočítal rozlohu.

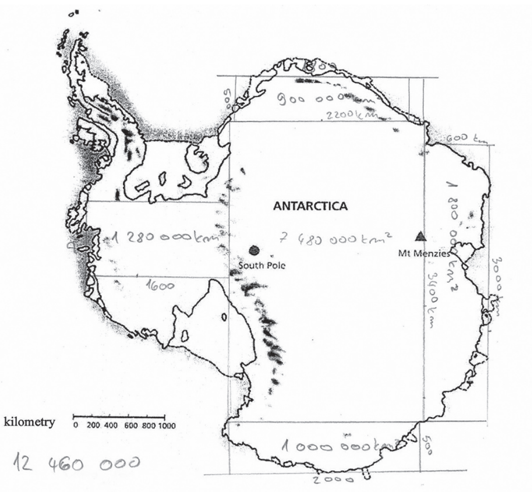
Vybráno ze žákovských řešení

Rozložil jsem „čtverce" o rozloze 1 000 000 km^2 a pak posčítal a okraje odhadl.

Plocha vyznačeného čtverce je dohromady 1 000 000 km^2. Do celé plochy se vejde přibližně 12×, což znamená 12 000 000 km^2.

Vytrhla jsem si čtvereček čtverečkovaného papíru a podle měřítka jsem udělala čtverec o straně 1 000 km. Potom jsem načrtla čtverec a odhadla velikost.

3. Odhad rozlohy rozdělením plochy na čtverce a obdélníky



Popis metody

Plochu rozdělíme na čtverce a obdélníky, jejichž obsah umíme vypočítat pomocí známého vzorce. Rozměry potřebné k výpočtu určujeme pomocí daného měřítka. Rozlohu určíme jako součet obsahů čtverců a obdélníků (viz žákovské řešení).

Rozbor žákovských řešení

Žák:

1) rozdělil plochu na několik čtverců a obdélníků tak, aby přibližně pokrývaly celou plochu;
2) změřil potřebné rozměry a pomocí měřítka určil skutečnou délku;
3) vypočítal obsahy jednotlivých útvarů a pak jejich součet.

Poznámka: Někteří žáci chybovali při zjišťování skutečné délky nebo v převodu jednotek obsahu.

Vybráno ze žákovských řešení

Rozdělila jsem si zemi na pomyslné čtverce, těch jsem spočítala obsah a pak je všechny sečetla.

Rozdělím si mapu na menší úseky, které změřím, a jelikož mi někde kus přebývá nebo naopak chybí, dostanu se k přibližnému výsledku.

Plocha vyšrafované části je 4 000 000 km^2. Odhaduji, že vyšrafovaná část je v celkové ploše asi třikrát. Čili plocha Antarktidy je 12 000 000 km^2.

4. Odhad rozlohy rozdělením plochy na trojúhelníky a čtyřúhelníky

Popis metody

Plochu rozdělíme na trojúhelníky (nejlépe pravoúhlé) a čtyřúhelníky (rovnoběžníky, případně lichoběžníky), jejichž obsah umíme vypočítat pomocí známého vzorce. Rozměry potřebné k výpočtu (délky stran, výšky) určujeme pomocí daného měřítka. Rozlohu určíme jako součet obsahů trojúhelníků a čtyřúhelníků (viz žákovské řešení).

Rozbor žákovských řešení

Žák:

1) rozdělil plochu na několik trojúhelníků a čtyřúhelníků tak, aby přibližně pokrývaly celou plochu;
2) změřil potřebné rozměry a pomocí měřítka určil skutečnou délku;
3) vypočítal obsahy jednotlivých útvarů a pak jejich součet.

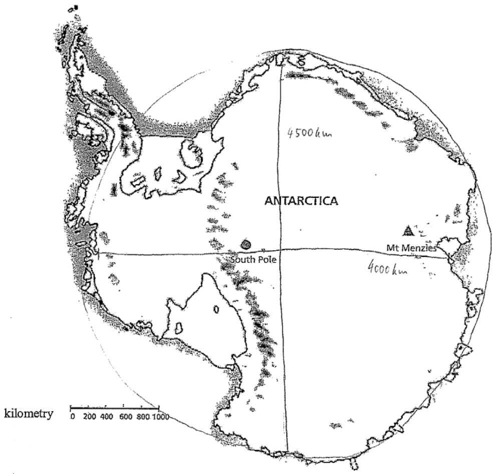
Poznámka: Pro další výpočet je rozhodující, na kolik trojúhelníků a čtyřúhelníků je plocha rozdělena a jakého jsou typu. Vhodné jsou pravoúhlé trojúhelníky, čtverce a obdélníky.

Vybráno ze žákovských řešení

Rozdělil jsem si plochu na menší části – obdélníky a lichoběžníky.

Snažím se naskládat co nejvíce čtverců, obdélníků, trojúhelníků do kontinentu a pak sečtu jejich obsah.

5. Odhad rozlohy nahrazením plochy kruhem



Popis metody

Zvolíme střed a poloměr kruhu tak, aby pokrýval co největší část plochy. Obsah kruhu umíme vypočítat pomocí známého vzorce. Poloměr nebo průměr kruhu potřebný k výpočtu určujeme pomocí daného měřítka.

Rozbor žákovských řešení

Žák:

1) zakreslil do obrázku kruh tak, aby přibližně pokrýval celou plochu;
2) změřil potřebné rozměry a pomocí měřítka určil skutečnou délku;
3) vypočítal obsah kruhu.

Poznámka: Pro další výpočet je rozhodující, jaká velikost poloměru je zvolena.

Vybráno ze žákovských řešení

Tvar mi připomíná kružnici, proto použiji vzorec pro obsah kruhu.

$r \doteq 6\,cm$ $\quad S = \pi \cdot r^2 \quad S = 3{,}14159 \cdot 2000^2$

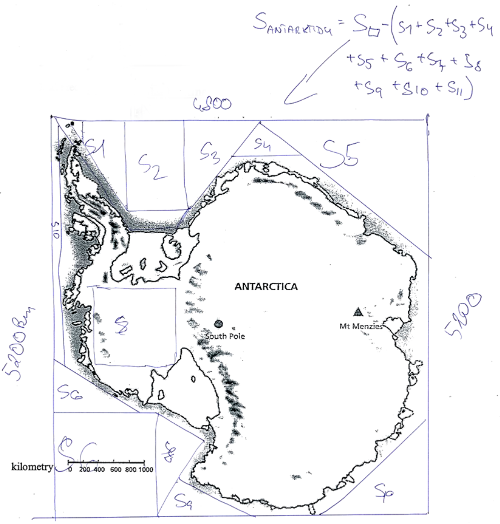
$r \doteq 2000\,km^2 \quad S = 12\,566\,360\,km^2$

Když vezmeme Antarktidu jako přibližný kruh o poloměru 6 cm ≐ 2000 km. Vyjde nám přibližná rozloha.

$S_o = \pi d = 3{,}14 \cdot 4000 = 12\,560\,km^2$

Nejprve jsem si udělala 2 úsečky a pomocí měřítka jsem odhadla jejich délku, pak jsem použila vzoreček pro výpočet obsahu kruhu, protože bych řekla, že Antarktida je přibližně kruh.

6. Odhad rozlohy rámování plochy do čtverce nebo obdélníku



Popis metody

Za rám, který zahrnuje celou plochu Antarktidy, je zvolen buď čtverec, nebo obdélník. Obsah takto zvoleného obrazce je velmi hrubým odhadem rozlohy kontinentu. Pro větší přesnost je třeba od celkového obsahu zvoleného obrazce odečíst obsah té části, kterou pevnina nepokrývá. Obsah této části lze stanovit odhadem k celkovému obsahu rámu nebo pomocí obsahu pravoúhelníků a trojúhelníků (ukázka žákovského řešení).

Rozbor žákovských řešení

Žák:

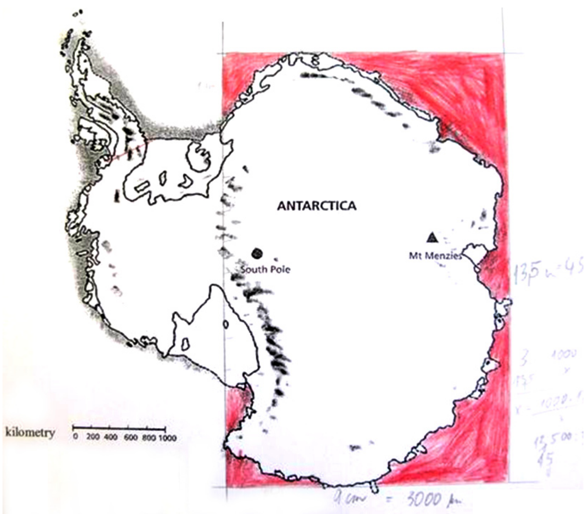
1) zakreslil do obrázku čtverec nebo obdélník tak, aby celá plocha kontinentu byla uvnitř zvoleného obrazce;
2) změřil potřebné rozměry a pomocí měřítka určil skutečné délky;
3) vypočítal obsah zvoleného obrazce;
4) vypočtený obsah označil jako výsledek.

Poznámka: Při nevhodné volbě obrazce je třeba od vypočteného obsahu odečíst obsah určité části plochy. Žáci, kteří tento obsah zhruba odhadli, chybovali méně než žáci, kteří se ji snažili určit pomocí obsahu dalších útvarů.

Vybráno ze žákovských řešení

Protože jsem si vypočítal obsah čtverce a plocha zaplňuje přibližně dvě třetiny čtverce, tak jsem plochu čtverce vydělil třemi a výsledek jsem odečetl od celkové plochy.

7. Doplnění plochy na čtverec nebo obdélník



Popis metody

Plochu rozdělíme na několik částí, z nichž lze přibližně poskládat obdélník. Určíme rozměry takto vytvořeného obdélníku a jeho obsah – rozlohu kontinentu.

Vybráno ze žákovských řešení

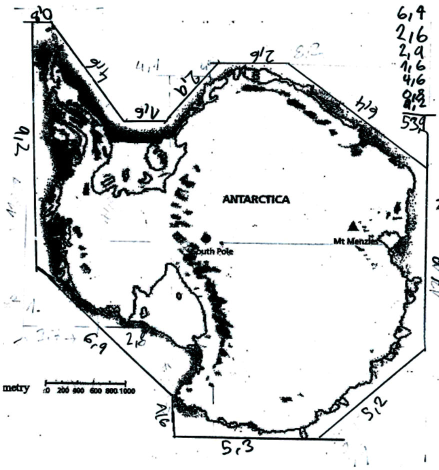
Udělala jsem si obdélník přibližně stejné plochy jako je plocha Antarktidy.

Území nad mnou nakreslenou osou o si přesunu do jižní části ostrova, aby mi tvořil útvar připomínající čtverec.

Vidím, že jsou si některé vykousnuté a přebývající části podobné, a když si je poskládám, utváří plochu – velký a malý obdélník. Vypočítám obsah.

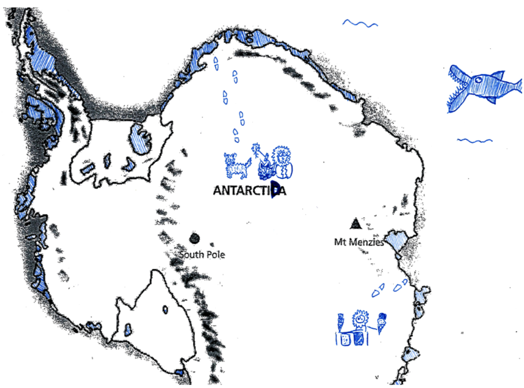
Vynechané (červené) moře je pevnina druhé poloviny Antarktidy + výběžek.

Chybné řešení



Narýsoval jsem si úsečky po obvodu, pravítkem jsem změřil velikost těchto úseček a sečetl ji. Výsledek=2 156 000 km

Kuriózní řešení



Ani dobrá rada v zadání: „Jestliže ti to pomůže při tvém odhadu, můžeš na mapu kreslit,“ při řešení úlohy nepomohla!

Naplňování očekávaných výstupů RVP ZV

Žák:

- zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku;
- odhaduje a počítá obsah a obvod základních rovinných útvarů;
- načrtává a sestrojuje rovinné útvary;
- analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu;
- pracuje s měřítky map a plánů.

Spojitost s jednotlivými složkami vymezení matematické gramotnosti

1. **situace a kontexty**: situace osobní, kontext autentický;
2. **kompetence**: matematické uvažování, matematická komunikace, modelování, vymezování problémů a jejich řešení;
3. **matematický obsah**: prostor a tvar.

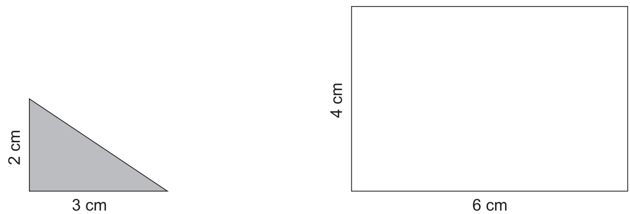
Možnosti využití úlohy ve výuce

- Výpočet obsahu základních rovinných útvarů (čtyřúhelník, kruh)
- Výpočet obsahu pomocí dělení obrazce na několik jednodušších mnohoúhelníků (trojúhelníků, čtverců, obdélníků apod.)
- Určování obsahu obrazce pomocí čtvercové sítě
- Využití měřítka mapy a plánu

Úlohy s obdobnou tematikou

Úlohy jsou převzaty z mezinárodního výzkumu TIMSS[12].

Úloha 1



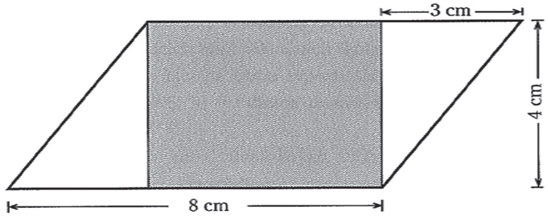
Kolik trojúhelníků shodných s vybarveným trojúhelníkem je potřeba k úplnému pokrytí plochy obdélníka?

Správná odpověď: osm trojúhelníků.

[12] *Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníku, Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání, Replikace 1999*. Praha : ÚIV, 2001, s. 24, 41, 67, 65.
STRAKOVÁ, J., KAŠPÁRKOVÁ, L. *Matematická a přírodovědná gramotnost v třetím mezinárodním výzkumu matematické a přírodovědné gramotnosti*. Praha : ÚIV, 1999, s. 22.

Úloha 2

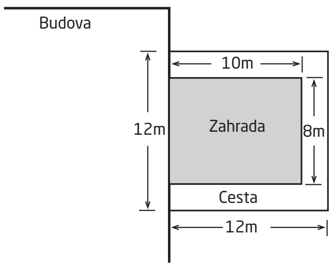
Na obrázku je v rovnoběžníku vybarvený obdélník.
Jaký je obsah vybarveného obdélníka?



Správná odpověď: 20 cm^2.

Úloha 3

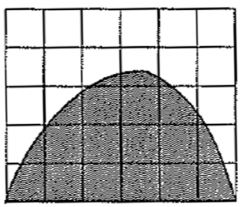
Zahrada tvaru obdélníka, která je umístěna u budovy, má ze tří stran cestu, jak je vidět na obrázku. Jaký je obsah cesty?



Správná odpověď: 64 m^2.

Úloha 4

Jednotkou obsahu v této úloze je jeden čtvereček. Který odhad obsahu vyšrafované plochy je nejlepší?

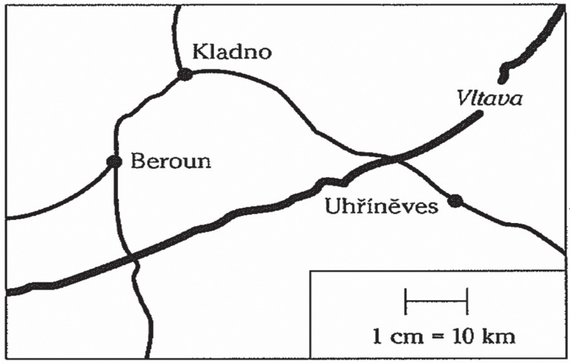


A. 10 čtverečků
B. 12 čtverečků
C. 14 čtverečků
D. 16 čtverečků
E. 18 čtverečků

Správná odpověď: C – 14 čtverečků

Úloha 5

1 cm na mapě představuje 10 km ve skutečnosti.



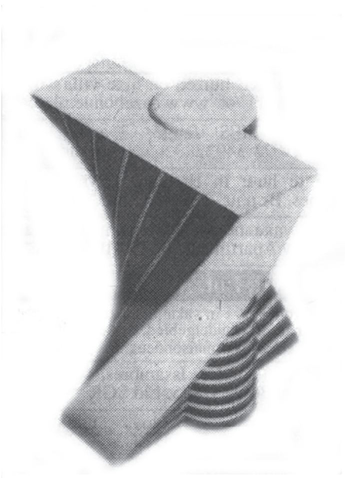
Jaká je přibližně skutečná vzdálenost Kladno – Uhříněves?

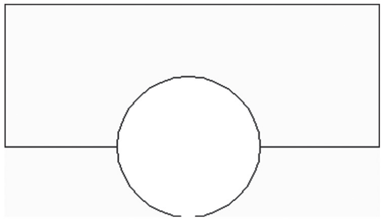
A. 5 km
B. 30 km
C. 40 km
D. 50 km

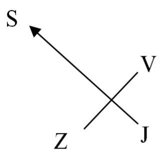
Správná odpověď: D – 50 km.

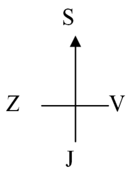
4.2 Zkroucený dům

V moderní architektuře mívají domy často neobvyklý tvar. Na obrázku vidíme počítačový model „zkrouceného domu“ a půdorys jeho přízemí. Kříž světových stran ukazuje orientaci budovy.









V přízemí budovy je hlavní vchod a obchody. Nad přízemím je 20 pater s byty.

Půdorys každého patra je podobný půdorysu přízemí, ale má trochu jinou orientaci než patro pod ním. Ve válci je výtahová šachta a vstupní prostory do každého patra.

Úloha 1

Odhadni celkovou výšku budovy v metrech. Odůvodni svůj postup.

Správná odpověď

Odhad celkové výšky budovy od 50 do 90 metrů byl ve výzkumu PISA hodnocen jako správná odpověď.

Dovednosti potřebné pro řešení úlohy

Pojmové uchopení úlohy:

Žák:

- chápe pojem celková výška budovy (přízemí + 20 pater);
- chápe pokyn „odhadni“ jako provedení výpočtu s přibližnými hodnotami.

Volba metody řešení:

Žák:

- odhaduje výšku nepravidelného tělesa strukturovaně – rozdělením tělesa na části (podlaží), jejichž výšku umí snáze odhadnout.

Provedení odhadu:

Žák:

- matematizuje reálnou situaci – rozdělí celé těleso (dům) na části (podlaží) a určuje jejich počet ze zadání úlohy;
- odhaduje výšku jednoho podlaží;
- zaokrouhluje, provádí základní početní operace;
- používá správné jednotky délky.

Popis metody

Odhadneme výšku jednoho patra budovy (minimální hodnota tohoto odhadu je 2,3 m). K tomuto odhadu je možné přičíst i výšku izolací mezi stropem jednoho podlaží a podlahu druhého podlaží. Takto stanovenou celkovou výšku vynásobíme dvaceti (počet pater). V přízemí budovy se nachází hlavní vchod a obchody. Proto je možno odhadnout výšku těchto prostor i dvojnásobkem výšky bytu. Zvolenou výšku obchodních prostor přičteme ke zjištěné výšce všech pater.

Rozbor žákovských řešení

Žák:

1) rozdělil dům na přízemí a 20 pater s byty;
2) odhadl výšku jednoho patra s byty;
3) odhadoval výšku mezipodlažních prostorů;
4) výšku jednoho patra včetně mezipodlažních složek případně zaokrouhlil a vynásobil počtem pater;
5) odhadl výšku přízemí s obchody;
6) sečetl výšku přízemí a celkovou výšku pater s byty.

Poznámka: Žáci odhadovali výšku jednoho podlaží budovy podle zkušeností z praxe (byt, učebny ve škole, v obchodě). Většina chybujících žáků odhadla výšku patra nižší nebo řešila úlohu se špatným počtem podlaží (nepřičetli výšku přízemí).

Vybráno ze žákovských řešení

63 m. Protože dům má 21 podlaží a 1 podlaží může mít asi 3 metry.

Předpokládejme, že průměrná výška 1 bytu i se stropem je 270 cm. 20 pater + přízemí nám dává 21 pater. 21 × 2,70 = 56,70 metrů.

Pokud je 20 pater a přízemí s obchody.
Jedno patro má na výšku 3 m, stejné
je to v přízemí! Na střeše budovy nejsou antény
ani další předměty zvyšující stavbu. Může být
výška budovy 63 m.

50 m protože je to hezké číslo
protože bych odhadoval výšku bytu
i s přechodovým materiálem mezi podlažími
na 2,3 m a plus obchodové patro
tak 4 m může mít

Chybná řešení

45 metrů. 20 pater × 2,5 metru (výška 1 bytu) = 45 m.

110 metrů. Řekla bych, že přibližně každé patro má 5 m kromě přízemí. To má 10 m.

Patro = 1,5 m. Celkem 31,5 metrů.

Kuriózní řešení

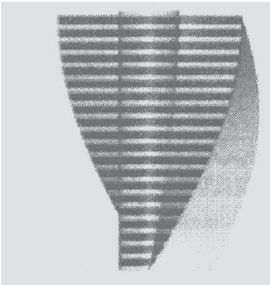
Otázka 1: ZKROUCENÝ DŮM

Odhadni celkovou výšku budovy v metrech. Odůvodni svůj postup.

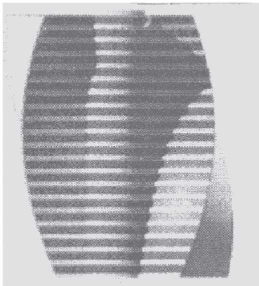
vypadá to obrovsky

Úloha 2

Na následujících obrázcích vidíme zkroucený dům ze stran.



Pohled 1



Pohled 2

Otázka 1: Z kterého směru byl pořízen pohled 1?

A. od severu
B. od západu
C. od východu
D. od jihu

Otázka 2: Z kterého směru byl pořízen pohled 2?

A. od severozápadu
B. od severovýchodu
C. od jihozápadu
D. od jihovýchodu

Správná odpověď

Správná odpověď na otázku 1 je C (od východu), na otázku 2 je D (od jihovýchodu).

Dovednosti potřebné pro řešení úlohy

Pojmové uchopení úlohy:

Žák:

- chápe pojem kříž světových stran;
- chápe pojem orientace budovy;
- chápe pojem pohled na těleso ze „stran“.

Volba metody a provedení řešení:

Žák:

- při pohledu na těleso z různých směrů využívá prostorovou představivost;
- pomocí kříže světových stran a znázorněného půdorysu budovy určí orientaci budovy;
- určuje směr pohledu na základě členitosti tělesa (umístění výtahové šachty, rozmístění bytů).

Popis metody

Pomocí kříže světových stran a prostorového znázornění „zkrouceného domu“ v úvodním zadání úlohy určíme směry, ve kterých bychom při pozorování „zkrouceného domu“ viděli celou výtahovou šachtu. V úvahu připadají dva směry – od východu a od jihu. Kdybychom se dívali od jihu, jako nejdelší bychom viděli hranu přízemí. Na Pohledu 1 je nejdelší hrana posledního patra. Proto se pozorovatel musí dívat ve východním směru.
Na Pohledu 2 je opět vidět celá výtahová šachta. Nejdelší hrana patří prostřednímu patru. Proto se na dům pozorovatel dívá z jihovýchodu.

Rozbor žákovských řešení

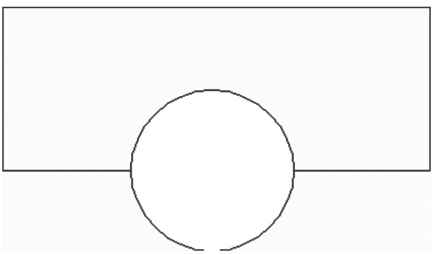
Žáci v otázce 1 a 2 vybírali jedno ze čtyř uvedených řešení, proto odpověděli téměř všichni žáci. Ojediněle se pokusili o zdůvodnění své volby (např. Protože je vidět válec a jedna strana, která se stáčí nahoru. Protože na pravé straně je stáčející se strana a na pravou část domu je vržen stín, tudíž tam musí být válec.)

Poznámka: Mnohem častěji žáci chybovali v odpovědi na otázku 2, správně odpověděla pouze třetina testovaných žáků. Naprostá většina volila z nesprávných odpovědí odpověď A. Žákům se pravděpodobně z obrázku nepodařilo identifikovat výtahovou šachtu, která jim pomohla při určení směru pohledu.

Úloha 3

Každé patro s byty je trochu „pootočeno“ vzhledem k přízemí. Nejvyšší patro (20. patro) je kolmo na přízemí.

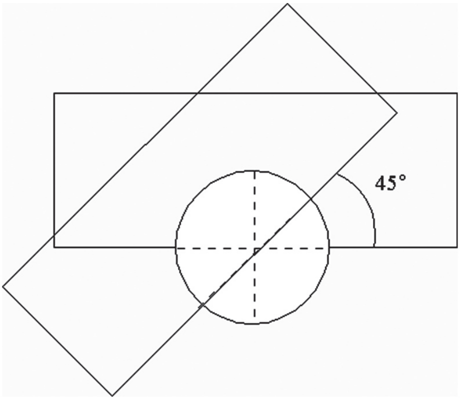
Následující obrázek znázorňuje přízemí.



Zakresli do tohoto obrázku půdorys 10. patra tak, aby z něj bylo zjevné, jak je toto patro umístěno vzhledem k přízemí.

Správná odpověď

Správně zakreslený obrázek, tj. správný střed otočení a smysl otočení proti směru hodinových ručiček. Ve výzkumu PISA byly uznávány úhly od 40 ° do 50 °.



Dovednosti potřebné pro řešení úlohy

Pojmové uchopení úlohy:

Žák:
- chápe pojem půdorys jako zobrazení pohledu na těleso shora;
- chápe pojem kolmost;
- chápe význam matematické interpretace změn – „pootočeno“ (vzhledem k přízemí).

Volba metody řešení:

Žák:
- pomocí obrazu rovinného útvaru v otočení zakreslí do obrázku půdorys 10. patra.

Provedení řešení:

Žák:
- určuje střed, úhel a smysl otáčení;
- načrtne (narýsuje) půdorys tělesa v otočení.

Popis metody

Podle polohy budovy na obrázku určíme kladný smysl otáčení útvaru představujícího půdorys přízemí. Velikost úhlu otáčení určíme rozpůlením pravého úhlu (20. patro je kolmo na přízemí, 10. patro je otočeno o úhel 45 °). Načrtneme (narýsujeme) obraz rovinného útvaru v otočení.

Rozbor žákovských řešení

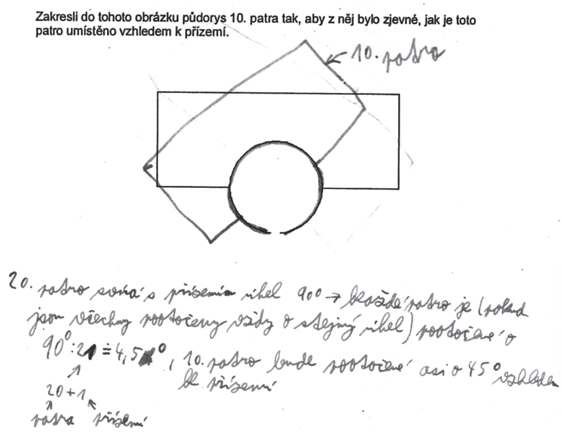
Žák:
1) na základě směrové růžice určil smysl a střed otáčení;
2) určoval velikost úhlu otočení přibližnou metodou dělení úhlu;
3) črtal půdorys trojrozměrného tělesa v otočení.

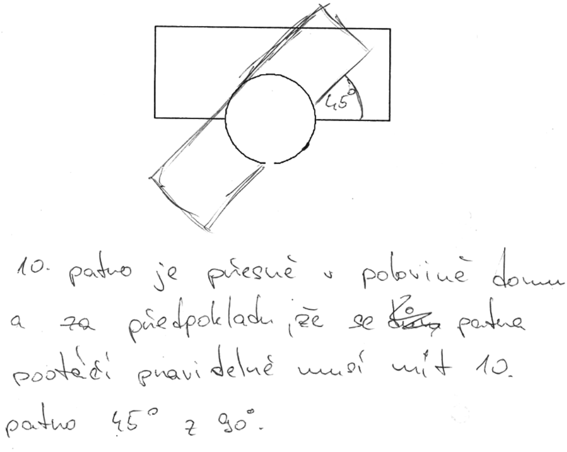
Poznámka: Nejčastěji chybovali žáci v určení úhlu otočení. Jenom malé procento žáků určilo špatně smysl otáčení.

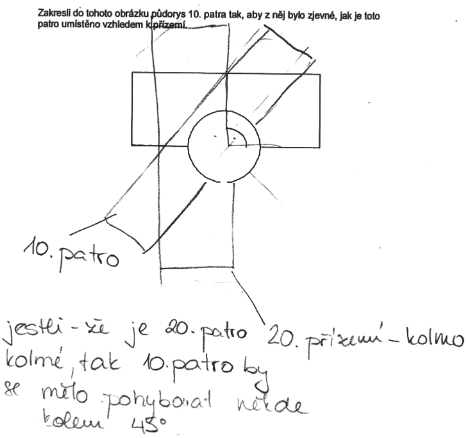
Vybráno ze žákovských řešení

20. patro je kolmé, 10. musí být někde uprostřed.

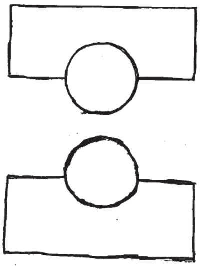
Dům se s každým otočením točí proti směru hodinových ručiček. Desáté patro by mělo být tedy lehce za polovinou.

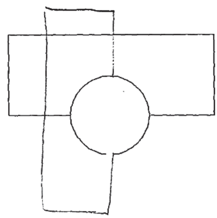






Chybná řešení:





Naplňování očekávaných výstupů podle RVP ZV

Žák:

- analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu;
- zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů;
- načrtne a sestrojuje rovinné útvary;
- užívá logickou úvahu.

Poznámka: Před použitím úlohy v běžných hodinách matematiky je potřeba žáky seznámit s pojmem půdorys, eventuálně nárys a bokorys.

Spojitost s jednotlivými složkami vymezení matematické gramotnosti

1. **situace a kontexty**: situace vzdělávací, kontext autentický;
2. **kompetence**: matematické uvažování, modelování, matematická argumentace, vymezování problémů a jejich řešení;
3. **matematický obsah**: prostor a tvar.

Možnosti využití úlohy ve výuce

- Rozvoj prostorové představivosti
- Procvičování odhadů a porozumění textu

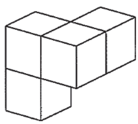
Úlohy s obdobnou tematikou

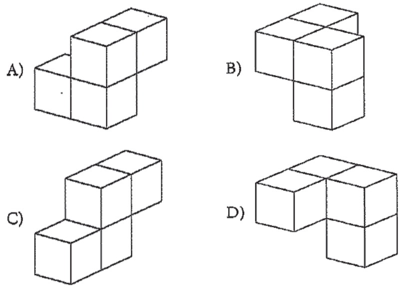
Úlohy jsou převzaty z mezinárodních výzkumů TIMSS a PISA[13].

Úloha 1

Těleso otočíme do jiné polohy.

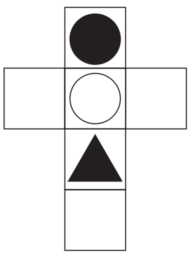
Na kterém obrázku by mohlo být otočené těleso?



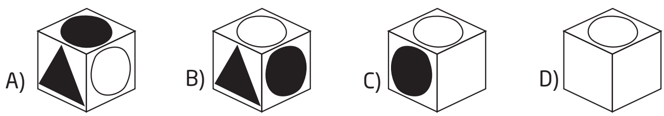


Správná odpověď: D

Úloha 2



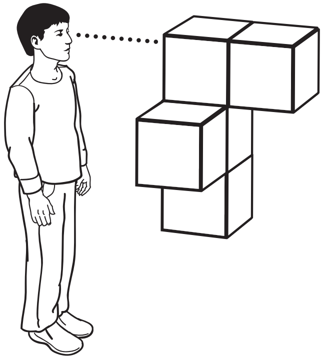
Která z následujících krychlí by mohla být složena ze sítě nahoře?



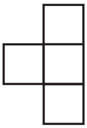
Správná odpověď: C

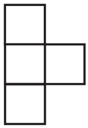
[13] TOMÁŠEK V. *Výzkum TIMSS 2007, Úlohy z matematiky pro 8. ročník*. Praha : ÚIV, 2009, s. 60, 71.
Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníku, Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání, Replikace 1999. Praha : ÚIV, 2001, s. 3.
Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003, Praha : ÚIV, 2004, s. 41.

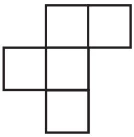
Úloha 3

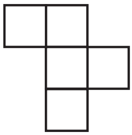


Těleso na obrázku je vytvořeno z 5 krychliček. Jaký tvar vidí osoba na obrázku?

A) 

B) 

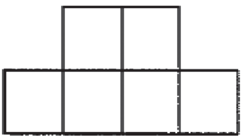
C) 

D) 

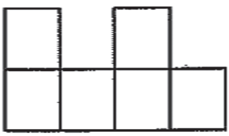
Správná odpověď: B

Úloha 4

Na obrázku je pohled z boku a zpředu na objekt složený z krychlí.



Pohled z boku



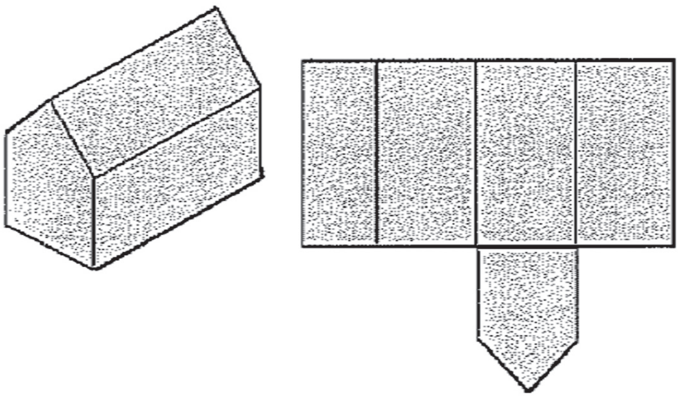
Pohled zpředu

Kolik krychlí bylo použito na vytvoření tohoto objektu?

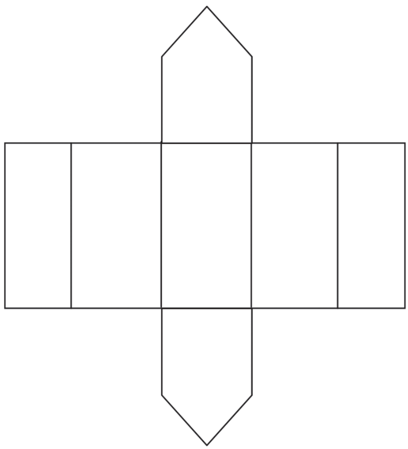
Správná odpověď: Minimální počet krychlí je 6, maximální počet krychlí je 20.

Úloha 5

Na obrázku je dáno dvojrozměrné zobrazení stodoly a její neúplná síť. Doplňte síť stodoly.



Správné řešení:



4.3 Srdeční tep

Lidé by se ze zdravotních důvodů neměli přepínat, např. při sportu, aby nepřekročili určitou frekvenci srdečního tepu.

Léta byl vztah mezi doporučenou maximální tepovou frekvencí a věkem osoby vyjadřován následujícím vzorcem:

doporučená maximální tepová frekvence = 220 – věk.

Poslední výzkumy ukázaly, že by se tento vzorec měl poněkud upravit. Podle nového vzorce je:

doporučená maximální tepová frekvence = 208 – (0,7 × věk).

Úloha 1

V novinovém článku vyšlo: „Použijeme-li nový vzorec místo starého, zjistíme, že doporučený maximální počet úderů srdce za minutu pro mladší lidi poněkud poklesne a pro starší lidi poněkud vzroste."
Od jakého věku vzroste doporučená maximální tepová frekvence při použití nového vzorce? Zapiš svůj postup.

Správná odpověď

Hodnoty 41 nebo 40 byly ve výzkumu PISA hodnoceny jako správná odpověď.

Dovednosti potřebné pro řešení úlohy

Pojmové uchopení úlohy:

Žák:
- prokáže čtenářské dovednosti k nalezení podstatných informací;
- prokáže schopnost porozumět matematickému textu;
- chápe význam matematické interpretace změn – vzroste, poklesne, je stejný;
- chápe význam matematických symbolů a rozumí jejich zápisu;
- matematicky dokáže vyjádřit vztah sdělení.

Volba způsobu výpočtu:

Žák vytváří jednoduchý model pro danou reálnou situaci:
- sestavením rovnice;
- sestavením nerovnice;
- dosazováním číselných hodnot do vzorce.

Provedení výpočtu:

Žák:
- algebraicky vyjádří vztah rovnosti nebo nerovnosti dvou výrazů;
- užívá matematické symboly k vyjádření proměnné;
- provádí správné ekvivalentní úpravy lineární rovnice nebo nerovnice;
- kontroluje správnost svého výpočtu písemně nebo zpaměti;
- systematicky dosazuje číselné hodnoty do výrazu;
- provádí základní početní operace ke zjištění hodnoty výrazu;
- porovnává hodnoty výrazů a na základě porovnání formuluje odpověď.

Metody výpočtu

Řešení této úlohy není rutinní. Žáci mají vytvořit matematický model, který jim umožní nalézt řešení. Následně pak musejí zjistit, zda vytvořený model koresponduje s kontextem zadané otázky, a zformulovat odpověď.
Jde o komplexní úlohu, která podporuje vytváření strategií řešení, identifikaci důležitých údajů, hledání vztahů. V úloze mají žáci za úkol zjistit konkrétní hodnotu udávající počet úderů srdce za minutu, pro kterou dávají tyto dva vzorce stejný výsledek. To lze provést buď algebraicky (žáci sestaví lineární rovnici nebo nerovnici s jednou neznámou, např. *x*, *v* nebo celé slovo *věk*), nebo dosazováním číselných hodnot do vzorce (žáci do vzorců dosadí určitou hodnotu věku, pak hodnotu zvyšují nebo snižují a sledují změny…).

1. Sestavení rovnice

$220 - x = 208 - (0{,}7x) \quad | -208 \qquad 208 - (0{,}7 \cdot 40)$

$12 - x = -0{,}7x \quad | +x \qquad 208 - 28 = 180$

$12 = 0{,}3x \quad | : 0{,}3 \qquad 220 - 40 = 180$

$40 = x$ → od 40. roku

(od 1. dne 41. roku)

Popis metody

Z textu úlohy určíme neznámou hodnotu a zvolíme si symbol k jejímu vyjádření. Převedeme slovní vyjádření pomocí matematických symbolů a matematických operací. Tím vytvoříme model, pomocí kterého hledáme řešení: Výraz pro doporučenou maximální tepovou frekvenci podle starého a nového vzorce dáme do rovnosti a sestavíme lineární rovnici 220 – v = *208 – (0,7 × v)*. Pomocí ekvivalentních úprav vyřešíme sestavenou rovnici. Při formulování odpovědi se vrátíme k otázce v zadání úlohy. Formulujeme odpověď, že od 40. nebo od 41. roku věku vzroste doporučená maximální tepová frekvence při použití nového vzorce.

Rozbor žákovských řešení

Žák:
1) na základě porozumění textu sestavil lineární rovnici 220 – v = *208 – (0,7 × v)*;
2) k vyřešení sestavené rovnice použil ekvivalentní úpravy a správně prováděl matematické operace s racionálními čísly;
3) formuloval odpověď a případně provedl písemně zkoušku správnosti řešení.

Poznámka: Žáci řešili úlohu sestavením lineární rovnice s jednou neznámou. Nejčastěji se chyby při řešení lineární rovnice vyskytovaly při provádění numerických výpočtů. Objevily se i chyby způsobené nepozorností v opsání číslic *(v rovnici figuruje číslo 208, žák ho však špatně opsal a použil číslo 206)*. Ojedinělá snaha byla úlohu řešit soustavou lineárních rovnic, k úspěšnému řešení chyběl dostatečný matematický aparát.

Vybráno ze žákovských řešení

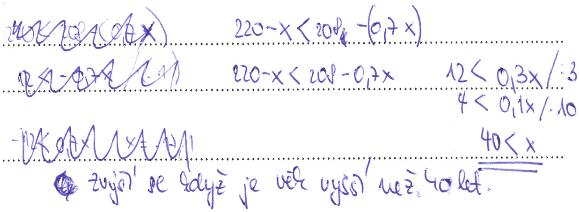
Ve 40. roku se to rovná, od 41. roku se to mění.

Tento zlom nastane v momentu, kdy se hodnota obou vzorců rovná, proto při vypočítání x dostanu tento věk.

Vytvořím rovnici tím, že starý a nový vzorec dám do rovnosti a za věk dosadím x. X, které mi vyjde, by měl být věk, od kterého se tepová frekvence zvýší.

Do 40. roku se mírně snižuje. Od 40. roku se mírně zvyšuje.

2. Sestavení nerovnice



Popis metody

Sestavíme lineární nerovnici *220 – v < 208 – (0,7 × v)*, ve které porovnáme doporučenou maximální tepovou frekvenci při použití starého vzorce s novým. Pomocí ekvivalentních úprav vyřešíme sestavenou nerovnici a formulujeme odpověď.

Rozbor žákovských řešení

Žák:

1) na základě porozumění textu sestavil lineární nerovnici *220 – v < 208 – (0,7 × v)*;
2) k vyřešení sestavené nerovnice použil ekvivalentní úpravy a správně prováděl matematické operace s racionálními čísly;
3) formuloval odpověď a případně provedl písemně zkoušku správnosti řešení.

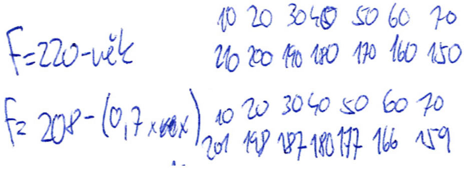
Vybráno ze žákovských řešení

Od věku 41 let (tedy včetně 41) budou mít lidé vyšší frekvenci tepu.

Zavedením nového vzorce se dop. tep. max. fr. zvýší po 40. roce života.

Zvýší se, když je věk vyšší než 40 let.

3. Dosazování číselných hodnot do vzorce



nového vzorce zvýší? Zapište postup svého řešení.

- 40 = 180
- 30 = 190
- 20 = 200

220 - věk. 220 - 10 = 230

Ve 40 letech jsou obě tepové fr. 208-(0,7·10) = 201

20 = 194
30 = 187
40 = 180

stejné => čím jsme mladší, tak je větší

rozdíl -> obou vzorců výsledku => z toho mi vyplyne od 41 a více let.

Popis metody

Do výrazu s proměnnou pro nový a starý vzorec doporučené maximální tepové frekvence systematicky dosazujeme číselné hodnoty (nejlépe po desítkách), dokud nedostaneme stejnou číselnou hodnotu. Stejná číselná hodnota udává věk, kdy je tepová frekvence stejná, a na základě zjištěné hodnoty formulujeme odpověď, od jakého věku tepová frekvence použitím nového vzorce vzroste.

Rozbor žákovských řešení

Žák:

1) dosazoval systematicky (nejčastěji v 10letých či 5letých intervalech) do obou výrazů různé hodnoty věku a hledal, pro kterou hodnotu se oba výrazy budou rovnat;
2) jestliže tuto hodnotu objevil, formuloval odpověď.

Poznámka: Někteří žáci nebyli schopni najít systém pro dosazování hodnot do výrazu s proměnnou a dosazování prováděli nahodile.

Vybráno ze žákovských řešení

Ve 40. roce života jsou podle vzorce hodnoty stejné, tudíž od 41. roku se tep. frekvence zvýší. Zkoušela jsem dosazovat do vzorce po 5 letech.

Napsal jsem si vzorec a dosazoval hodnoty věku 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70... Zvýší se od překročení 40 let (tam vychází pro oba vzorce 180).

Od 41. roku, zjistil jsem to tak, že jsem postupně porovnával výsledky starého a nového postupu.

Zvýší se od 41. roku. O jeden celý tep v 44. roku.

Kuriózní řešení

Vzali jsme věk člověka, který je těsně za svými nejlepšími léty – neboli kdy byl fyzicky nejvýkonnější... to je 40 (podle mne) ... podle toho nám vyšlo, že podle starého i nového vzorce je doporučená max. frekvence stejná. A jelikož víme, že pokročilejším věkem se zvýší => tak ve věku 41 let bude mít vyšší frekvenci podle novějšího vzorce.

Bez výpočtu – Kolem 40 let, protože pak lidské tělo se dříve unaví (z nedávného vědeckého průzkumu) a mívá větší problémy při větší fyzické námaze.

Logicky a z doktorského hlediska tak okolo 50.

Úloha 2

Vzorec *doporučená maximální tepová frekvence = 208 – (0,7 × věk)* se užívá také k určení toho, kdy je tělesné cvičení nejúčinnější. Výzkum prokázal, že cvičení je nejúčinnější, když tepová frekvence činí asi 80 % doporučené maximální frekvence.
Sestav vzorec pro výpočet tepové frekvence při největší účinnosti cvičení vyjádřený pomocí věku.

Správná odpověď

Každý vzorec, který je ekvivalentní vzorci pro doporučenou maximální tepovou frekvenci vynásobenému 80 %:

- **tepová frekvence = 166,4 – (0,56 × věk);**
- **tepová frekvence = 166 – (0,6 × věk);**
- **tepová frekvence = [208 – (0,7 × věk)] × 0,8;**

byl ve výzkumu PISA hodnocen jako správná odpověď.

Dovednosti potřebné pro řešení úlohy

Pojmové uchopení úlohy:

Žák:

- chápe pojem procentuální části celku;
- rozumí zápisu matematických symbolů;
- dokáže matematicky vyjádřit vztah mezi procenty, desetinnými čísly a zlomky;
- prokáže čtenářské dovednosti k nalezení podstatných informací.

Volba způsobu výpočtu:

Žák:

- vytváří model pro danou situaci sestavením algebraického vzorce.

Provedení výpočtu:

Žák:

- vyjádří vztah části z celku v procentech;
- reálnou situaci vyjádří algebraicky;
- užívá matematické symboly k vyjádření algebraického výrazu.

Metoda výpočtu – sestavení algebraického vzorce

maximální f → 80%

f = [208 – (0,7 · věk)] · 0,8

208 · 0,8 = 166,4 0,7 · 0,8 = 0,56

f = [208 · 0,7 věk] · 0,8

f = 166,4 – 0,56 věk

Popis metody

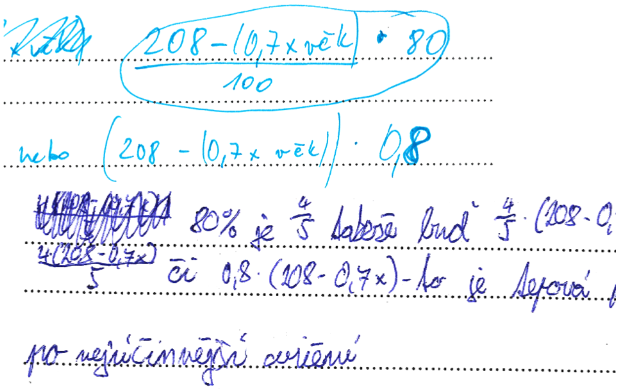
Při řešení této úlohy musejí žáci vzorec sestavit – tento postup je ve škole méně obvyklý. Důležité je porozumět zadání úlohy a „matematizovat reálnou situaci“: *Tělesná výchova je nejúčinnější, když srdce pracuje na 80 % doporučené maximální tepové frekvence.*
Pro řešení stačí vzorec pro maximální tepovou frekvenci vynásobit číslem 0,8. Výraz pro optimální srdeční frekvenci je potom: [208 – (0,7 × věk)] × 0,8.

Rozbor žákovských řešení

Žák:
1) Převedl 80 % na desetinné číslo 0,8, na zlomek nebo daný vzorec násobil 80 a dělil 100.
2) Při sestavování vzorce použil závorky.

Poznámka: Někteří žáci se pokusili o výpočet procentové části. Zvolili ovšem špatný základ, získali tak pouze část vzorce. Skoro polovina žáků úlohu vůbec neřešila.

Ukázky ze žákovských řešení



Naplňování výstupů podle RVP ZV

Žák:
- provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel;
- užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem);
- matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu;
- formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav;
- analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel;
- užívá logickou úvahu při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací;
- zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor.

Spojitost s jednotlivými složkami vymezení matematické gramotnosti

1. **situace a kontexty:** situace vědecká, kontext autentický;
2. **kompetence:** matematické uvažování, matematická komunikace, modelování, užívání matematického jazyka;
3. **matematický obsah:** změna a vztahy.

Možnosti využití úlohy ve výuce

Úlohu lze zařadit do výuky na procvičení:

- základních početních operací s desetinnými čísly;
- výpočtů s procenty (zvládnutí vyjádření části celku desetinným číslem, zlomkem, procentem);
- ekvivalentních úprav lineárních rovnic s jednou neznámou nebo jednoduchých nerovnic;
- proměnné a jejího využití v matematickém zápisu.

Úlohy s obdobnou tematikou

Úlohy jsou převzaty z mezinárodního výzkumu TIMSS[14]:

Úloha 1

Nechť n je číslo. Jestliže n vynásobíme 7 a pak přičteme 6, je výsledek 41. Která z následujících rovnic vyjadřuje tento vztah?

A. $7n + 6 = 41$
B. $7n - 6 = 41$
C. $7n \cdot 6 = 41$
D. $7(n + 6) = 41$

Správná odpověď: A

Úloha 2

Tabulka vyjadřuje vztah mezi *x* a *y*.

x	2	3	4	5
y	7	10	13	16

Která z následujících rovnic vyjadřuje tento vztah?

A. $y = x + 5$
B. $y = x - 5$
C. $y = 1/3\,(x - 1)$
D. $y = 3x + 1$

Správná odpověď: D

[14] *Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníku, Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání, Replikace* 1999. Praha : ÚIV, 2001. ISBN 80-511-0406-6.

Úloha 3

Tabulka popisuje vztah mezi proměnnými x a y.

x	y
1	1
2	4
3	7
4	10

Která z následujících rovnic vyjadřuje tento vztah?

A. $y = 2x + 2$
B. $y = 2x - 2$
C. $y = 3x + 2$
D. $y = 3x + 1$
E. $y = 3x - 2$

Správná odpověď: E

Úloha 4

V tabulce jsou uvedeny hodnoty proměnných x a y, přičemž y je přímo úměrné x.

x	4	8	Q
y	9	P	45

Urči hodnoty P a Q.

A. $P = 40$ a $Q = 13$
B. $P = 18$ a $Q = 17$
C. $P = 20$ a $Q = 18$
D. $P = 40$ a $Q = 18$
E. $P = 18$ a $Q = 20$

Správná odpověď: E

Úloha 5

Vypočti x, jestliže $12x - 10 = 6x + 32$.

Správná odpověď: 7

Praktická úloha[15]

Zjisti, jak se během cvičení mění hodnota tvého pulzu. Můžeš vystupovat a sestupovat ze stupínku nebo dělat dřepy. Měření prováděj po dobu 5 minut.

[15] MANDÍKOVÁ, D., PALEČKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V. *Praktické úlohy TIMSS*. Praha : VÚP, 1996.

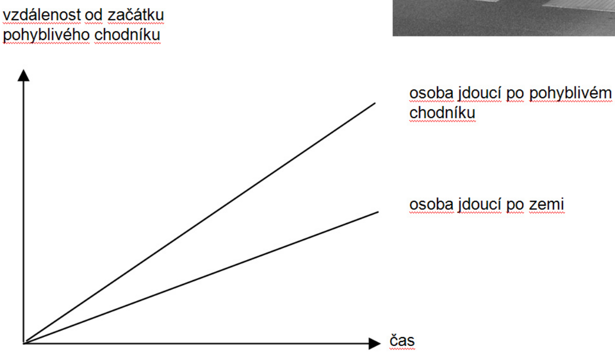
Co bys měl(a) udělat:

- Najít svůj pulz a přesvědčit se, že ho umíš počítat. Nemůžeš-li svůj pulz najít, požádej učitele o pomoc.
- Rozhodnout se, jak často budeš provádět měření pulzu. První měření proveď před začátkem cvičení.
- Vystupovat a sestupovat ze stupínku nebo dělat dřepy po dobu 5 minut a v pravidelných intervalech si měřit pulz. (Měření a cvičení neprováděj současně.)

1. Sestav tabulku, v níž uvedeš časy, kdy jsi měřil(a) svůj pulz, a naměřené hodnoty pulzu.
2. Jak se měnil tvůj pulz během cvičení?
3. Proč si myslíš, že se tvůj pulz měnil uvedeným způsobem?

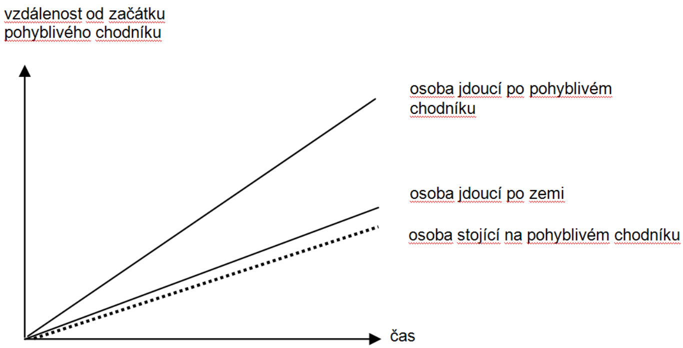
4.4 Pohyblivý chodník

Na fotografii vpravo vidíme pohyblivý chodník.
Graf závislosti dráhy na čase porovnává chůzi po pohyblivém chodníku s chůzí po zemi podél pohyblivého chodníku.



Předpokládejme, že obě osoby zachycené v grafu jdou stejně rychle. Doplň do grafu přímku, která znázorňuje závislost vzdálenosti na čase u osoby, která na pohyblivém chodníku stojí.

Správná odpověď



Ve výzkumu PISA měli žáci za úkol doplnit do grafu přímku, vysvětlení se od nich nepožadovalo. Za správné řešení byla uznávána přímka, která je pod oběma danými přímkami, ale musí být blíž k přímce označující „osobu jdoucí po zemi" než k vodorovné ose.

Dovednosti potřebné pro řešení úlohy

Pojmové uchopení úlohy:

Žák:

- chápe význam závislosti času a vzdálenosti znázorněné přímkou v grafu;
- chápe pokyn porovnávání grafů závislosti dráhy na čase;
- čte informace z grafu;
- prokáže čtenářské dovednosti k pochopení úlohy.

Volba metody řešení úlohy:

Žák určuje umístění přímky znázorňující závislost vzdálenosti na čase u osoby, která na pohyblivém chodníku stojí:

- sestrojením kolmice a odečítáním délky úseček;
- logickou úvahou;
- odečítáním úhlů.

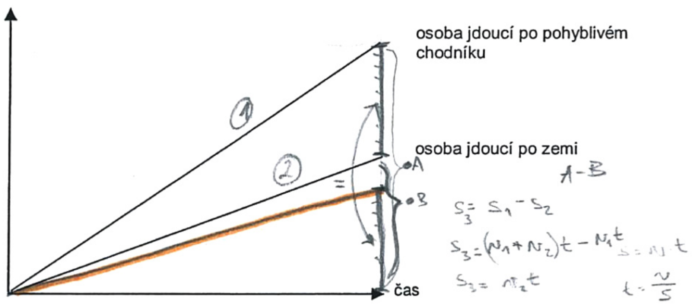
Provedení metody řešení úlohy:

Žák:

- využívá grafickou metodu odečítání úhlů za pomoci rýsovacích pomůcek nebo jenom náčrtu;
- určuje různé hodnoty z lineární závislosti v grafu;
- propojuje matematické znalosti se zkušeností z reálného světa.

Metody řešení úlohy

1. Sestrojení kolmice a odečítání délky úseček



Popis metody

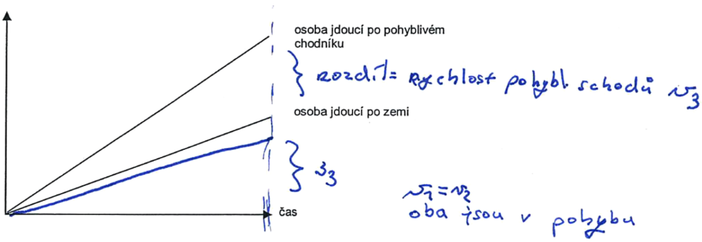
Přímka znázorňující závislost dráhy na čase osoby jdoucí po pohyblivém chodníku vytíná na kolmici vztyčené v libovolném bodě časové osy úsečku o velikosti d_1. Přímka znázorňující závislost dráhy na čase osoby jdoucí po zemi vytíná na této kolmici úsečku o velikosti d_2. Odečtením (výpočtem, graficky, odhadem) velikosti druhé úsečky (menší) od první úsečky (větší) získáme délku úsečky d_3. Jestliže naneseme tuto velikost na vztyčenou kolmici ve zvoleném bodě na časové ose, získáme bod, kterým prochází přímka znázorňující závislost dráhy na čase osoby stojící na pohyblivém chodníku. Druhým bodem této přímky je průsečík os.

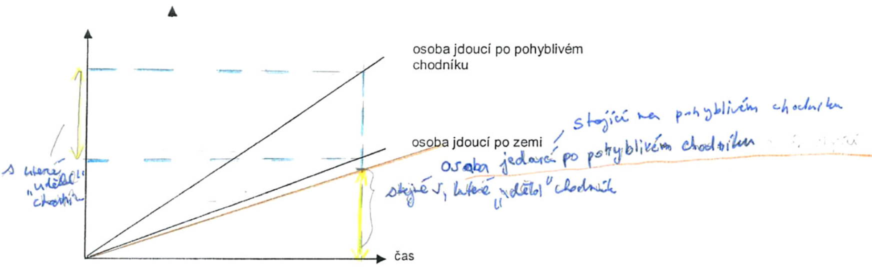
Rozbor žákovských řešení

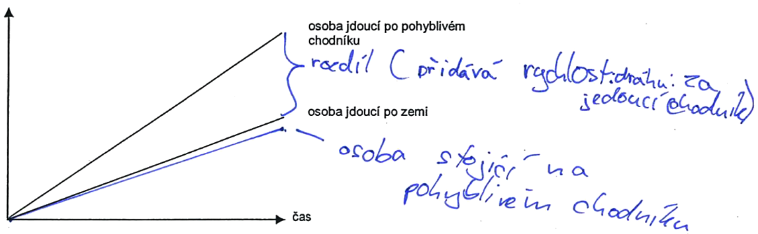
Žák:

1) vztyčil kolmici (pomocí pravítka nebo náčrtkem) z libovolného bodu na časové ose;
2) vyznačil průnik kolmice a přímky znázorňující osobu jdoucí po pohyblivém chodníku, změřil (odhadl) délku úsečky od tohoto bodu k patě kolmice;
3) vyznačil průnik kolmice a přímky znázorňující osobu jdoucí po zemi, změřil (odhadl) délku úsečky od tohoto bodu k patě kolmice;
4) zjištěné velikosti úseček od sebe odečetl (výpočtem, graficky, odhadem);
5) nanesl (graficky, odhadem) rozdíl na vztyčenou kolmici ve zvoleném bodě na časové ose a získal bod, kterým prochází přímka znázorňující závislost dráhy na čase osoby stojící na pohyblivém chodníku;
6) spojil tento bod s průsečíkem os.

Vybráno ze žákovských řešení







2. Logická úvaha

Rozbor žákovských řešení

Žák řešil úlohu na základě jiné logické úvahy, než je uvedeno výše. Při řešení úlohy používal slovní popis. V některých případech se snažil využít znalostí z fyziky použitím vztahu dráhy a času při rovnoměrném přímočarém pohybu.

Vybráno ze žákovských řešení

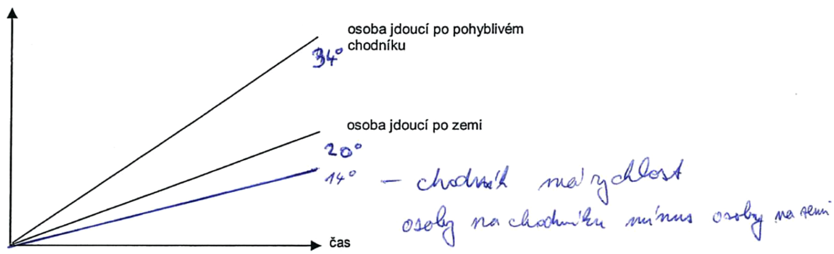
Dejme tomu, že se pás pohyblivého chodníku pohybuje stejnou rychlostí, jako jde člověk vedle něj. Když na páse člověk jde, má 2× větší rychlost, protože mu pás pomáhá. Když na páse stojí, měl by mít asi stejnou rychlost jako ten člověk, který jde po svých. Pak už záleží jenom na výkonu stroje… Když jde člověk rychleji, než pás jede, ujede člověk na páse méně km než chodec, proto musí být přímka v grafu víc skloněná.

V praxi obvykle jezdící schody předejdeme, ale záleží hlavně na rychlosti chůze.

Když jde člověk normální chůzi, je o maličko rychlejší než člověk stojící na pohyblivém chodníku.

Osoba jdoucí na pohyblivém chodníku se pohybuje ještě jednou tak rychle jako osoba jdoucí po zemi, ale o něco pomaleji. Takže osoba, která na pohyblivém chodníku stojí, se pohybuje o něco pomaleji než osoba jdoucí po zemi.

3. Odečítání úhlů (věcně nesprávný postup)



Jedná se o pohyb rovnoměrný přímočarý ($s = v \times t$), kde vzhledem k jednoduchosti zadání můžeme přímo sčítat rychlosti jednotlivých pohybů. Velikost rychlosti vyjadřuje tangens úhlu sevřeného příslušnou přímkou a časovou osou. Tuto skutečnost žáci zjednodušili na odečítání (sčítání) úhlů. Tato úvaha je může dovést k výsledku, který neodpovídá fyzikální podstatě problému, ale přesto splňuje kritérium správné odpovědi. V mezinárodním výzkumu PISA se zdůvodnění ani uvedení postupu po žácích nepožadovalo.

Popis metody

Změříme velikost úhlu, který svírá časová osa s přímkou znázorňující závislost dráhy na čase osoby jdoucí po pohyblivém chodníku. Změříme velikost úhlu, který svírá časová osa s přímkou znázorňující závislost dráhy na čase osoby jdoucí po zemi. Od velikosti prvního (většího) úhlu odečteme (výpočtem nebo graficky) velikost druhého (menšího) úhlu. Načrtneme výslednou přímku znázorňující závislost dráhy na čase osoby stojící na pohyblivém chodníku, která svírá s časovou osou úhel, jehož velikost jsme určili.

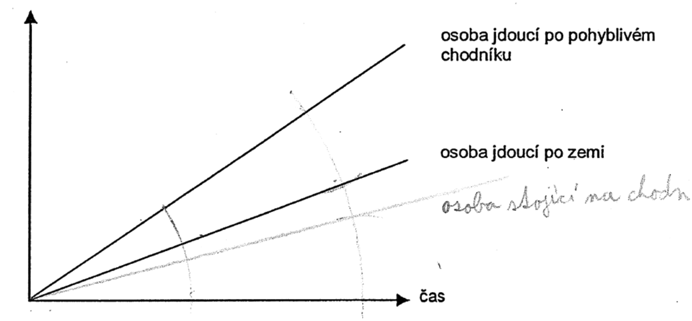
Rozbor žákovských řešení

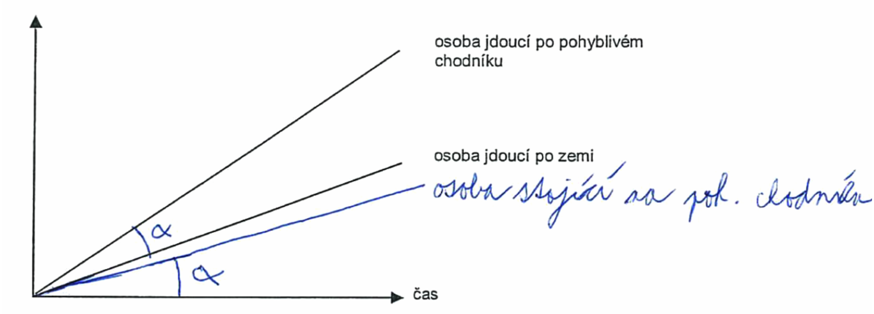
Žák:

1) zjistil velikost úhlu, který svírá časová osa s přímkou znázorňující závislost dráhy na čase osoby jdoucí po pohyblivém chodníku úhloměrem, graficky nebo jen odhadem;
2) zjistil velikost úhlu, který svírá časová osa s přímkou znázorňující závislost dráhy na čase osoby jdoucí po zemi úhloměrem, graficky nebo jen odhadem;
3) zjištěné velikosti úhlů od sebe odečetl (výpočtem, graficky, odhadem), a tím získal velikost úhlu, který svírá přímka znázorňující závislost dráhy na čase osoby stojící na pohyblivém chodníku s časovou osou;
4) výslednou přímku narýsoval nebo pouze načrtnul.

Vybráno ze žákovských řešení

Při sestrojení přímky musíme v grafu odečíst od úhlu osoby jdoucí po chodníku úhel osoby jdoucí po zemi. Výsledný úhel je rychlost samotného chodníku.





C

Chybná řešení

Osoba, která bude na pohyblivém chodníku jen stát, urazí stejnou vzdálenost jako osoba jdoucí po zemi za stejný čas. Pohyblivý chodník se pohybuje stejně rychle jako průměrný člověk.

Je-li čas u osoby jdoucí po pásu poloviční, pak člověk, který jde po zemi, jde stejnou rychlostí, jakou jede pás, tudíž přímka bude shodná s rychlostí osoby jdoucí po zemi.

Naplňování očekávaných výstupů podle RVP ZV

Žák:
- vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem;
- matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů;
- určuje velikost úhlu měřením a výpočtem.

Spojitost s jednotlivými složkami vymezení matematické gramotnosti

1. **situace a kontexty**: situace veřejná, kontext autentický;
2. **kompetence**: matematické uvažování, matematická komunikace, vymezování problémů a jejich řešení, užívání matematického jazyka, užívání pomůcek a nástrojů;
3. **matematický obsah**: změna a vztahy.

Možnosti využití úlohy ve výuce

- Grafické sčítání a odečítání úhlů a úseček
- Zjišťování funkčních hodnot z grafu funkce

Úlohy s obdobnou tematikou

Úlohy jsou převzaty z mezinárodních výzkumů TIMSS a PISA[16].

Úloha 1 – Školní výlet

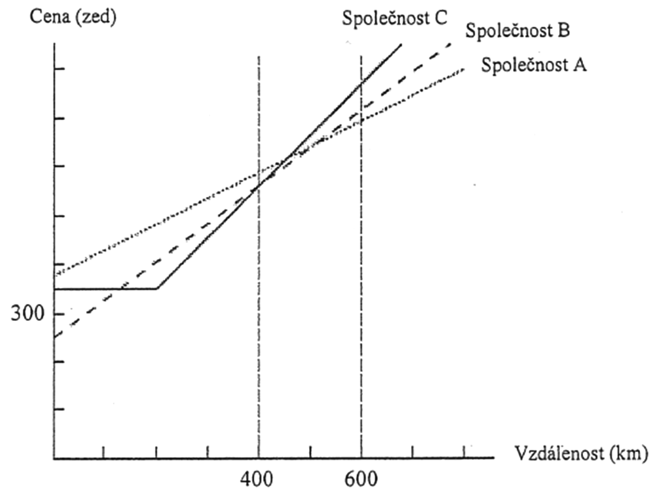
Školní třída si chce najmout autobus na výlet a informovala se u tří společností na cenu. Společnost A účtuje 375 zedů základní poplatek plus 0,5 zedu za ujetý kilometr. Společnost B účtuje 250 zedů základní poplatek plus 0,75 zedu za ujetý kilometr. Společnost C účtuje pevnou cenu 350 zedů za prvních 200 kilometrů plus 1,02 zedu za kilometr nad 200 km. Kterou společnost by si měla třída vybrat, když při výletě najezdí něco mezi 400 a 600 km?

Správná odpověď: V intervalu 400–500 ujetých km je výhodnější společnost C a v intervalu 500-600 ujetých km společnost A.

---

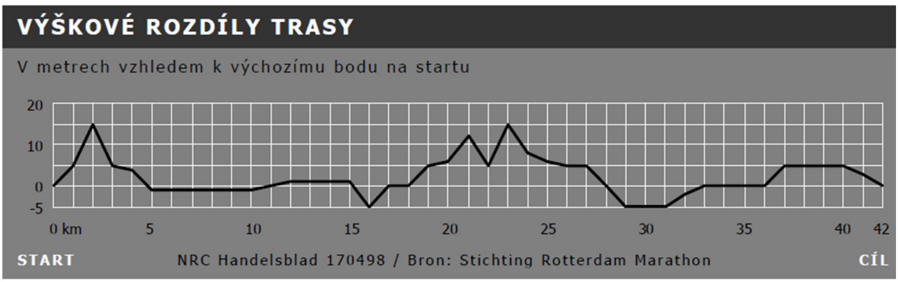
[16] *Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003*, Praha : ÚIV, 2004, s. 31, s. 43–44.
Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníku, Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání, Replikace 1999. Praha : ÚIV, 2001, s. 58, 60.
STRAKOVÁ, J., KAŠPÁRKOVÁ, L. *Matematická a přírodovědná gramotnost v třetím mezinárodním výzkumu matematické a přírodovědné gramotnosti*. Praha : ÚIV, 1999, s. 19.

Poznámka: Žáci mohou tento výsledek kromě výpočtu zdůvodnit i následujícím grafem:



Úloha 2 – Rotterdamský maraton

Tegla Loroupe vyhrála v roce 1998 maraton v Rotterdamu. „Bylo to snadné," řekla, „běželo se po rovině." Zde vidíte graf výškových rozdílů rotterdamského maratonského běhu:

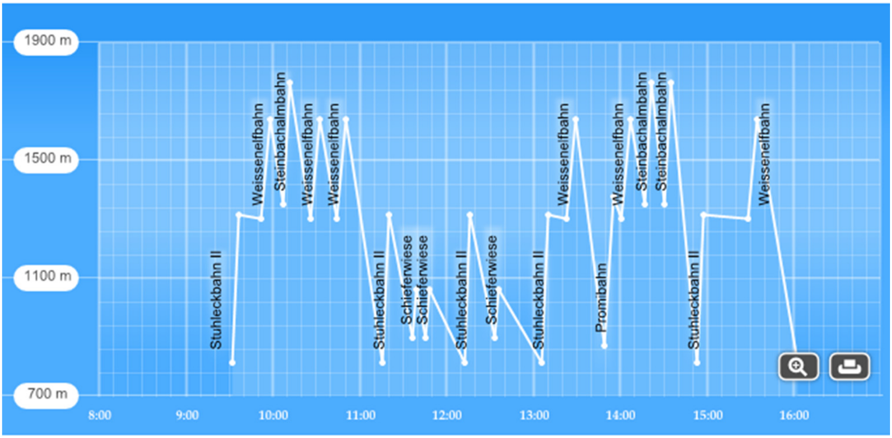


Kolik byl rozdíl mezi nejvyšším a nejnižším bodem trasy?

Správná odpověď: 20 m.

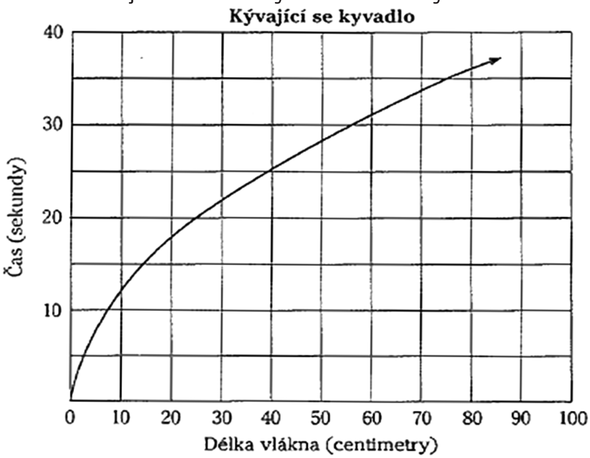
Poznámka: Obdobné úlohy lze vytvářet i z reálných situací, se kterými se žáci mohou setkat (graf výškových rozdílů lyžování v rakouských Alpách).

Graf výškových rozdílů lyžování v rakouských Alpách.



Úloha 3

Graf znázorňuje závislost doby dvaceti kmitů kyvadla na délce vlákna kyvadla.



Délka vlákna kyvadla je 90 cm. Za jak dlouho vykoná toto kyvadlo 20 kmitů?

A. za 35 sekund
B. za 38 sekund
C. za 42 sekund
D. za 45 sekund

Správná odpověď: B.

Úloha 4

Graf znázorňuje vlhkost vzduchu v místnosti naměřenou během odpoledne.

Kolikrát byla od 6 do 12 hodin dopoledne naměřena vlhkost vzduchu přesně 20 %?

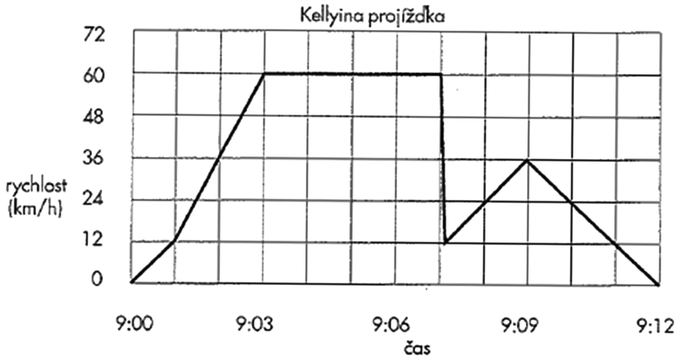
A. jednou
B. dvakrát
C. třikrát
D. čtyřikrát

Správná odpověď: C.

Úloha 5

Kelly si vyjela autem na projížďku. Najednou jí však přímo pod kola odkudsi vběhla kočka. Kelly prudce zabrzdila a v poslední chvíli kočku minula.
Byla mírně otřesená, a proto se rozhodla vrátit kratší cestou. V grafu je zaznamenána rychlost auta během projížďky.

a) Jaká byla maximální rychlost auta během projížďky?
b) V kolik hodin Kelly začala brzdit, aby se vyhnula kočce?



Správná odpověď:

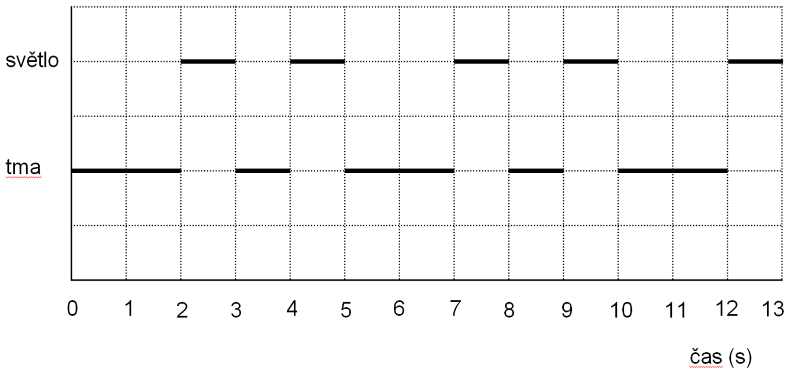
a) 60 km/h a ekvivalentní vyjádření;
b) 9:07 či ekvivalentní odpověď.

4.5 Maják

Majáky jsou věže, které mají ve své nejhornější části světlomet. Majáky pomáhají lodím plujícím v blízkosti pobřeží orientovat se na moři za noci.

Světlomet vysílá záblesky v pravidelném, stále se opakujícím rytmu. Každý maják má svůj signál.

Následující obrázek znázorňuje signál jednoho majáku. Záblesky se střídají s chvilkami tmy.



Rytmus je pravidelný. Po určité době se signál opakuje. Doba, za niž proběhne jeden úplný signál, než se začne opakovat, se nazývá *perioda.* Zjistíme-li periodu, snadno prodloužíme graf na další sekundy, minuty nebo i hodiny.

Úloha 1

Který z následujících údajů by mohl představovat periodu signálu tohoto majáku?

A. 2 sekundy
B. 3 sekundy
C. 5 sekund
D. 12 sekund

Správná odpověď

Perioda signálu majáku 5 sekund (C) byla ve výzkumu PISA hodnocena jako správná odpověď.

Dovednosti potřebné pro řešení úlohy

Žák:

- chápe pojem perioda jako pravidelně se opakující část signálu (pozn.: pojem perioda se objevuje ve vzdělávacím obsahu školské matematiky v souvislosti s periodickými čísly, popřípadě s periodickými funkcemi);

- rozpoznává geometrické pravidelnosti;
- správně interpretuje údaje uvedené v grafu.

Popis metody

Z grafu určíme, jak dlouhá část signálu (sledu úseček) se pravidelně opakuje, a její délku vyjádříme v sekundách. V grafu představuje jeden dílek časový úsek 1 s. Dvousekundový úsek tmy se opakuje po pěti sekundách, proto nejmenší perioda signálu je 5 s.

Rozbor žákovských řešení

Téměř všichni žáci určili délku periody na základě grafu správně.

Ukázky žákovských řešení

Každých 5 sekund se opakuje: delší tma (2 s) – světlo (1 s) – kratší tma (1 s) – světlo (1 s).

Za 5 s se zopakuje celý průběh děje, pak to celé začíná stejně od začátku.

Celek se skládá z period. Perioda začíná na libovolném místě a končí těsně před dalším začátkem. Periody jsou vždy stejné. Tady to je blik-nic-blik-nic-nic a pak opět začíná stejný úsek.

Podle obrázku je to nejpravděpodobnější.

Protože se tento signál opakuje každých 5 s. Po každých pěti sekundách nastává stejný sled světla a tmy.

Úloha 2

Kolik sekund vysílá maják světelné záblesky v rozmezí jedné minuty?

A. 4 sekundy
B. 12 sekund
C. 20 sekund
D. 24 sekund

Správná odpověď:

Odpověď 24 sekund (D) byla ve výzkumu PISA hodnocena jako správná odpověď.

Dovednosti potřebné pro řešení úlohy

Žák:
- vyhledává údaje v grafu (vyjadřuje geometrickou pravidelnost aritmeticky);
- určuje počet period v daném časovém úseku;
- provádí základní početní operace s celými čísly;
- rozpozná vztah přímé úměrnosti;
- používá trojčlenku.

Popis metod

1) Délku světelných záblesků určíme na základě periody signálu. Periodu tvoří dvousekundový úsek světla a třísekundový úsek tmy. Během jedné minuty se perioda zopakuje dvanáctkrát (60 : 5 = 12), tzn.: maják vysílá světelné záblesky 12 × 2 s = 24 s.

2) Délku světelných záblesků určíme z grafu. Představíme si, jak by graf pokračoval. Maják vyšle každých 10 sekund 4 sekundové světelné záblesky. Během jedné minuty tedy vysílá světelné záblesky po dobu 6 × 4 s = 24 s.

3) Mezi délkou signálu a počtem světelných signálů platí vztah přímé úměrnosti. Vysílá-li maják během 5 sekund 2 světelné záblesky, během 1 min = 60 s jich vyšle dvanáctkrát více, tj. 12 × 2 = 24.

Rozbor žákovských řešení

Téměř všichni žáci určili dobu světelných záblesků správně. Většinou počítali dobu světelných záblesků pomocí zjištěné periody. Určili, kolikrát se zopakuje perioda během jedné minuty, nebo využili poznatku, že mezi délkou signálu a počtem světelných záblesků platí vztah přímé úměrnosti, a řešili úlohu například pomocí trojčlenky.

Ukázky žákovských řešení

Protože za 1 minutu (60 s) je 12 period a v každé periodě maják svítí 2 s, potom tedy svítí (2 × 12) 24 s.

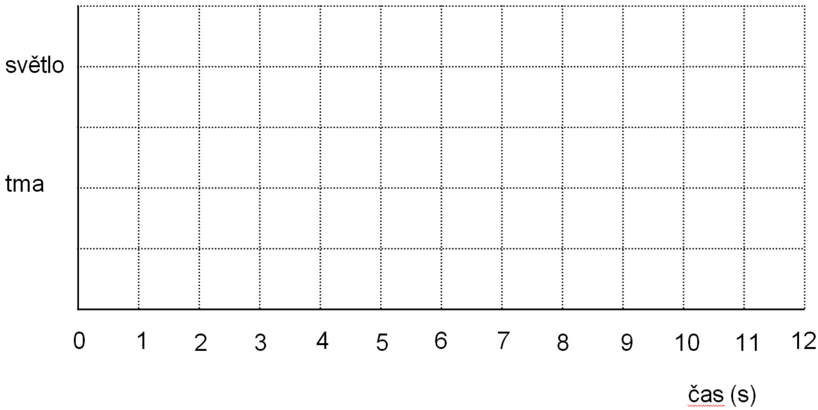
Za každých 5 s (jednu periodu) maják vyšle 2 světelné záblesky. Do jedné minuty se vejde 12 period. 12 × 2 = 24

Protože za 5 s vyšle 2 signály, tudíž za 60 s 12× více (protože 60 : 5 = 12), proto 24.

za 5 s …… 2 světla
za 60 s …. x světel
x = 60 × 2 : 5 = 120 : 5 = 24
5 s … 2×
10 s … 4×
20 s … 8×
40 s … 16×
60 s … 24×

Úloha 3

Do následujícího obrázku zakresli graf světelných záblesků majáku, který během jedné minuty vysílá světelné záblesky po dobu 30 sekund. Perioda tohoto signálu musí být 6 sekund.



Správná odpověď

Jeden jednosekundový a jeden dvousekundový záblesk (dvě možnosti) nebo jeden třísekundový záblesk za periodu 6 s byl ve výzkumu PISA hodnocen jako správná odpověď.

Dovednosti potřebné pro řešení úlohy

Žák:

- interpretuje správně pojem perioda;
- sestavuje pravidelnost podle zadaných parametrů;
- provádí základní početní operace s celými čísly;
- rozpozná vztah přímé úměrnosti;
- znázorňuje pravidelnost graficky.

Popis metody

Nejprve určíme dobu světelných záblesků v periodě (30 s za 1 min, tj. 3 s v šestisekundové periodě). Třísekundový světelný záblesk lze vysílat buď najednou (3 s), nebo ve dvou úsecích (1 s + 2 s). V případě třísekundového světelného záblesku má perioda podobu *světlo-světlo-světlo-tma-tma-tma*. V případě dvou světelných záblesků existují dvě možnosti periody: *světlo-světlo-tma-tma-světlo-tma* nebo *světlo-světlo-tma-světlo-tma-tma*.

Rozbor žákovských řešení

Více než dvě třetiny žáků zakreslily signál s danou periodou správně. Žáci nejčastěji kreslili signál s periodou *světlo-světlo-světlo-tma-tma-tma*. Nejčastější chybou bylo zakreslení signálu s dvousekundovou periodou *světlo-tma-světlo-tma-světlo-tma*.

Vybráno ze žákovských řešení

Polovina každé periody (je světlo). Aby byla perioda 6 sekund, musí se střídat 3 s tmy a 3 s světla.

Světlo a tma se musí rovnat. oxoxox to být nemůže. Perioda by byla 2. Může to být 3, 3, 3 … (oooxxx oooxxx …) nebo 2, 1, 1, 2 … (ooxoxx ooxoxx …, xxoxoo xxoxoo …).

Naplňování očekávaných výstupů podle RVP ZV

Žák:

- provádí početní operace v oboru celých čísel;
- užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část;
- určuje vztah přímé úměrnosti;
- užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh.

Spojitost s jednotlivými složkami vymezení matematické gramotnosti

1. **situace a kontexty:** situace veřejná, hypotetický kontext („co když“);
2. **kompetence:** matematické uvažování, argumentace, modelování;
3. **matematický obsah:** změna a vztahy.

Možnosti využití úlohy ve výuce

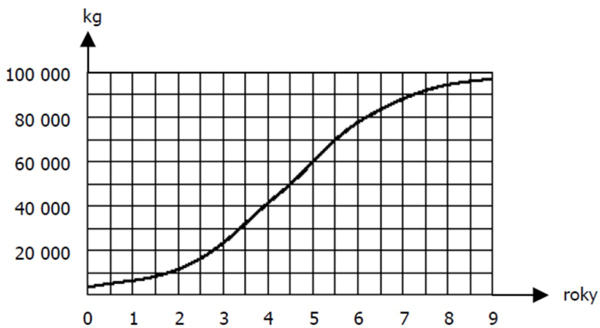
Úlohu je vhodné zařadit v rámci tematického okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty (RVP ZV).

Úlohy s obdobnou tematikou

Úlohy s obdobnou tematikou, ve které žáci musejí vymyslet vlastní strategii a argumentaci pro dost složitý a neobvyklý problém, lze nalézt v publikaci Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumech PISA 2003[17].

Úloha 1

Do vodní nádrže byly vypuštěny ryby. Graf ukazuje model hmotnostního přírůstku ryb v nádrži.



Předpokládejme, že rybář chce vyčkat pár let a poté začít s rybolovem v nádrži. Kolik let by měl rybář čekat, pokud chce od té doby každoročně ulovit co největší počet ryb? Vysvětli svou odpověď.

[17] *Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003*. Praha : ÚIV, 2004, s. 27.

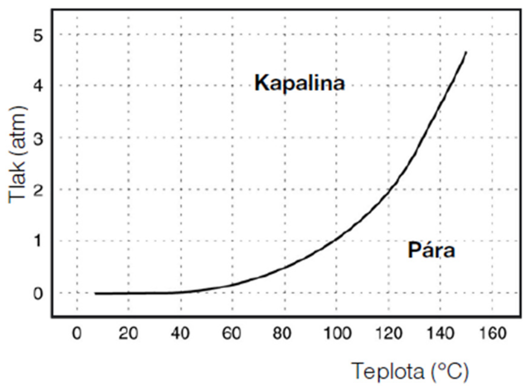
V publikaci je uveden i podrobný rozbor metody řešení této úlohy: *„Je zřejmé, že tato úloha vyhovuje definici řešení matematického problému v autentickém kontextu. Žáci budou muset vymyslet vlastní strategii a argumentaci pro dosti složitý a neobvyklý problém. Složitost problému je částečně dána tím, že je třeba uvážlivě kombinovat informace poskytnuté jednak graficky a jednak textově. Dalším faktorem, který přispívá ke složitosti problému, je to, že žáci bezprostředně nevidí žádnou odpověď a musejí sami přijít s dobrou strategií řešení. Budou muset interpretovat graf a přitom si uvědomit, že rychlost růstu dosahuje maxima po pěti letech. Aby byli úspěšní, budou muset své řešení posuzovat již v jeho průběhu, a ověřovat tak zdar své strategie. Úloha dále vyžaduje, aby žáci uvedli svou argumentaci a náznak ‚důkazu'. Jednou z možností je použít metodu pokus-omyl: Podívejme se, co se stane, když počkáme například tři roky. A odtud pokračujeme dále. Počkáme-li do konce pátého roku, můžeme pak mít každoročně bohatý úlovek – 20 000 kg ryb. Když nebudeme čekat tak dlouho a začneme lovit o rok dříve, můžeme vylovit jen 17 000 kg, a budeme-li čekat příliš dlouho (šest let), můžeme vylovit jen 18 000 kg ryb ročně. Optimálního výsledku tedy dosáhneme, když rybolov zahájíme po pěti letech."*

V rámci tematického okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty (RVP ZV) lze využít i další netradiční úlohy, které byly uvolněny z mezinárodního výzkumu PISA. Publikace[18], která je volně dostupná na stránkách http://www.tauris.cz/netradicni-ulohy-problemove-ulohy-mezinarodniho-vyzkumu-pisa, obsahuje řadu úloh, ve kterých žák mimo jiné užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací[19].

Úloha 2

V tlakovém hrnci lze uvařit jídlo rychleji než v obyčejném hrnci. Poklice je vybavena těsněním, které brání páře, aby unikala jinudy než otvorem uprostřed poklice. Na otvoru je kovový klobouček, který reguluje tlak. Na víku je ještě pojistka.

Následující graf zobrazuje skupenství tekutiny v závislosti na teplotě a tlaku:



[18] TOMÁŠEK, V., POTUŽNÍKOVÁ, E. *Netradiční úlohy, problémové úlohy mezinárodního výzkumu PISA*. Praha : ÚIV, 2004, s. 69–77.
[19] Očekávaný výstup v tematickém okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy v RVP ZV.

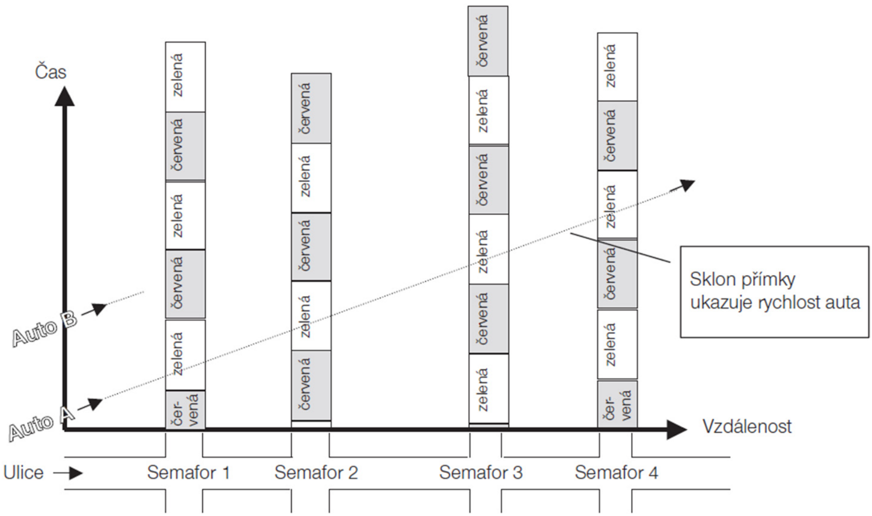
K zodpovězení otázky použij informace z grafu. U každého tvrzení zakroužkuj, je-li pravdivé, nebo nepravdivé.

Tvrzení	Zakroužkuj „Pravda“ nebo „Nepravda“
Graf vyjadřuje, že při konstantním tlaku má kapalina vyšší teplotu než pára.	Pravda / Nepravda
Teplota, při níž kapalina vře, s **rostoucím** tlakem **roste.**	Pravda / Nepravda
Zvýšení tlaku při konstantní teplotě způsobí přeměnu kapaliny v páru.	Pravda / Nepravda
V tlakovém hrnci uvaříme jídlo rychleji, protože v něm má kapalina vyšší teplotu než v obyčejném hrnci.	Pravda / Nepravda

Správná odpověď:
Nepravda, Pravda, Nepravda, Pravda v tomto pořadí.

Úloha 3

Jednou z možností, jak omezit dopravní zácpy, je dobře nastavit střídání světel na semaforech v ulicích. Následující graf zobrazuje závislost střídání světel na vzdálenosti a času u jedné soustavy semaforů. Než začneš odpovídat na otázky, důkladně si graf prohlédni.



Graf 1: Závislost střídání světel na vzdálenosti a času

Auto A vjíždí na začátek ulice krátce po čase 0 a jede rychlostí, kterou ukazuje sklon přímky (viz graf). Auto A projede všechny čtyři křižovatky na zelenou.
Auto B přijede na začátek ulice o něco později než auto A, jak je znázorněno v grafu. Předpokládejme, že auto B pojede stejnou rychlostí jako auto A. Zakresli pohyb auta B do grafu.

Správná odpověď:
Přímka rovnoběžná s přímkou pro auto A až k prvnímu semaforu, svislá čára k „zelené“ a pak opět šikmá přímka:

Pro správné zodpovězení této otázky musejí žáci porozumět grafickému znázornění vztahu mezi rychlostí, časem a vzdáleností a aplikovat je na zvláštní případ, kdy se auto musí zastavit na semaforu na červené. Žáci si musejí uvědomit, že rychlost auta je znázorněna sklonem přímky, takže pokud má jet auto B stejnou rychlostí jako auto A, musejí být obě přímky rovnoběžné. Dále musejí přijít na to, že čekání auta na semaforu se v tomto grafu zobrazí svislou úsečkou, protože ujetá vzdálenost se nemění, kdežto čas roste. Úloha je dosti obtížná, protože ve své odpovědi musejí vzít žáci v úvahu několik omezujících podmínek současně (rychlost auta B, rozložení světelných signálů, doba čekání) a odpověď zakreslit do grafu, který představuje nezvyklý a velmi abstraktní způsob vyjádření situace popsané v zadání otázky[20].

[20] TOMÁŠEK, V., POTUŽNÍKOVÁ, E. *Netradiční úlohy, problémové úlohy mezinárodního výzkumu PISA*. Praha : ÚIV, 2004, s. 70.

5 Závěr

Metodická příručka Matematická gramotnost ve výuce nabízí čtenářům – učitelům matematiky na základní škole jednu z mnoha cest vedoucích k rozvoji matematické gramotnosti jejich žáků. Na této cestě je důraz kladen na vzájemné působení učitel – žák pomocí slovních vyučovacích metod (zvláště pak heuristických rozhovorů) s využitím strukturovaných listů matematických úloh. K lepšímu pochopení dané struktury poslouží ukázkové listy uvolněných úloh z mezinárodních výzkumů, které mohou učitelé využít přímo při organizaci své výuky. Podle tohoto vzoru si může učitel vytvořit listy svých „oblíbených úloh“, které může během své pedagogické praxe doplňovat. Díky teoretickému základu a díky metodickým doporučením může učitel zvyšovat efektivitu svého působení na žáky při rozvoji jejich matematické gramotnosti.

Stranou byly ponechány formy vzdělávacího procesu. Je však zřejmé, že uvedené slovní metody lze využít jak při skupinové práci žáků, tak při samostatné práci i při zadání domácí práce žáků a jejím následném vyhodnocení. Nad rámec této publikace je také řešení problematiky využívání materiálních prostředků vhodných pro efektivní vyučování matematiky.

Pro vzorové listy matematických úloh byly vybrány uvolněné úlohy z mezinárodního výzkumu PISA. Další zajímavé náměty pro tvorbu listů matematických úloh lze nalézt kromě stránek Ústavu pro informace ve vzdělávání a dalších uvedených zdrojů i v Digifoliu matematické gramotnosti[21] na stránkách Metodického portálu www.rvp.cz.

Jeden cíl publikace Matematická gramotnost ve výuce bude splněn, jestliže listy uvolněných úloh, které jsou zpracovány v této publikaci, vybídnou čtenáře, kteří vyučují matematiku na základní škole, vyzkoušet si, jak by na vybraných pět úloh reagovali jejich žáci, jakou metodu řešení problému by zvolili, jakým směrem by se ubíral dialog mezi nimi a žáky, mezi žáky navzájem.

Naplnění druhého cíle je mnohem náročnější. Promýšlet všechny souvislosti podnětných úloh ve shodě s předkládanou strukturou listu matematických úloh, vytvořit list úlohy a doplňovat ho novými poznatky, sbírat různá žákovská řešení není záležitost jedné vyučovací hodiny. Jedná se o dlouhodobý proces, který však vede k vybudování podkladů, které lze ve výuce velmi efektivně využít k rozvoji matematické gramotnosti žáků.

Autoři této publikace přejí učitelům na této cestě hodně sil.

[21] http://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=2937

6 Literatura

Gramotnosti ve vzdělávání. Příručka pro učitele [online]. 1. vyd. Praha : VÚP, 2010. 64 s. [cit. 2011-04-29]. ISBN 80-87000-41-0. Dostupné z WWW: <http://www.vup-praha.cz/wp-content/uploads/2010/02/Gramotnosti-ve-vzdělávání1.pdf>.

HOUSKA, J. *Netradiční úlohy ve výuce matematiky*. Metodický portál: Články [online]. 18. 02. 2009, [cit. 2011-06-08]. Dostupné z WWW: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVB/3002/NETRADICNI-ULOHY-VE-VYUCE-MATEMATIKY.html>. ISSN 1802-4785.

KALOUS, Z., OBST, O. *Školní didaktika*. Praha : Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003. Praha : ÚIV, 2004.

KUŘINA, F. *Umění vidět v matematice*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-23753-3.

MANDÍKOVÁ, D., PALEČKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V. *Praktické úlohy TIMSS*. Praha : VÚP, 1996.

Netradiční úlohy. Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA. Praha : ÚIV, 2006. ISBN 80-211-0522-4.

STEHLÍKOVÁ, N. Užití podnětných úloh v matematice. *In Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2010*. Plzeň : Vydavatelský servis, 2010. ISBN 978-80-86843-29-2.

STRAKOVÁ, J., KAŠPÁRKOVÁ, L. *Matematická a přírodovědná gramotnost v Třetím mezinárodním výzkumu matematické a přírodovědné gramotnosti*. Praha : ÚIV, 1999. ISBN 80-211-0323-X.

Take the Test. Sample Questions from OECD's PISA Assessments. OECD, 2009. ISBN 9789264050808.

TOMÁŠEK, V. *Výzkum TIMSS 2007, Úlohy z matematiky pro 8. ročník*. Praha : ÚIV, 2009. ISBN 978-80-211-0591-1.

TOMÁŠEK, V., POTUŽNÍKOVÁ, E. *Netradiční úlohy, problémové úlohy mezinárodního výzkumu PISA*. Praha : ÚIV, 2004. ISBN 80-2111-0484-8.

Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníku, Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání, Replikace 1999. Praha : ÚIV, 2001. ISBN 80-511-0406-6.

VALIŠOVÁ, A., KASÍKOVÁ, H. *Pedagogika pro učitele*. Praha : Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1734-0.

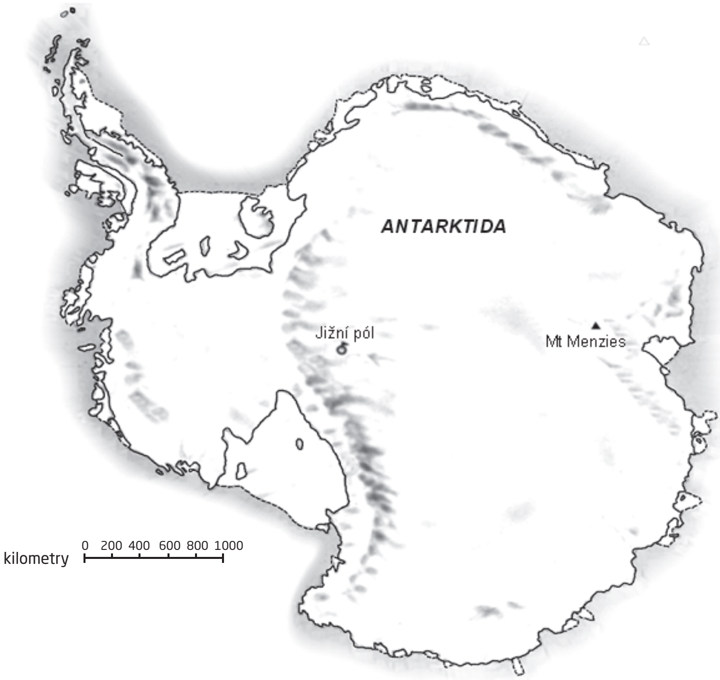
VANÍČEK, J. *Psychologické aspekty kognitivních technologií ve vyučování matematiky*. Dostupné z WWW http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_mat/externi/kat_mat_9782/k12.htm#vi.

7 Přílohy

Pracovní listy k úlohám Rozloha kontinentu, Zkroucený dům, Srdeční tep, Pohyblivý chodník a Maják.

ROZLOHA KONTINENTU

Na obrázku je mapa Antarktidy.



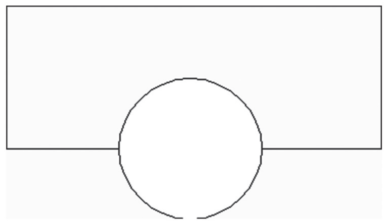
Otázka:

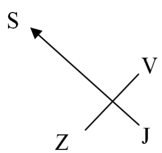
Užitím měřítka mapy odhadni rozlohu Antarktidy.

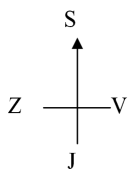
Zapiš postup a vysvětli, jak odhad provádíš. (Jestliže ti to pomůže při tvém odhadu, můžeš na mapu kreslit.)

ZKROUCENÝ DŮM

V moderní architektuře mívají domy často neobvyklý tvar. Na obrázku vidíme počítačový model „zkrouceného domu“ a půdorys jeho přízemí. Kříž světových stran ukazuje orientaci budovy.







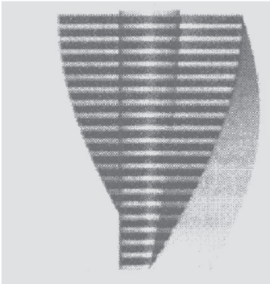
V přízemí budovy je hlavní vchod a obchody. Nad přízemím je 20 pater s byty.

Půdorys každého patra je podobný půdorysu přízemí, ale má trochu jinou orientaci než patro pod ním. Ve válci je výtahová šachta a vstupní prostory do každého patra.

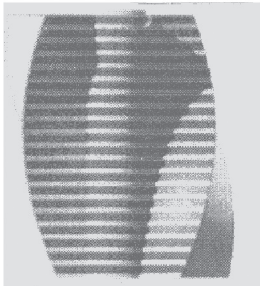
Otázka 1:

Odhadni celkovou výšku budovy v metrech. Odůvodni svůj postup.

Na následujících obrázcích vidíme zkroucený dům ze stran.



Pohled 1



Pohled 2

Otázka 2:

Z kterého směru byl pořízen pohled 1?

A. od severu
B. od západu
C. od východu
D. od jihu

Otázka 3:

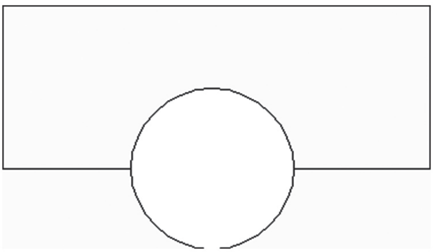
Z kterého směru byl pořízen pohled 2?

A. od severozápadu
B. od severovýchodu
C. od jihozápadu
D. od jihovýchodu

Otázka 4:

Každé patro s byty je trochu „pootočeno" vzhledem k přízemí. Nejvyšší patro (20. patro) je kolmo na přízemí.

Následující obrázek znázorňuje přízemí.



Zakresli do tohoto obrázku půdorys 10. patra tak, aby z něj bylo zjevné, jak je toto patro umístěno vzhledem k přízemí.

SRDEČNÍ TEP

Lidé by se ze zdravotních důvodů neměli přepínat, např. při sportu, aby nepřekročili určitou frekvenci srdečního tepu.

Léta byl vztah mezi doporučenou maximální tepovou frekvencí a věkem osoby vyjadřován následujícím vzorcem:

doporučená maximální tepová frekvence = 220 – věk.

Poslední výzkumy ukázaly, že by se tento vzorec měl poněkud upravit. Podle nového vzorce je:

doporučená maximální tepová frekvence = 208 – (0,7 × věk).

Otázka 1:

V novinovém článku vyšlo: „Použijeme-li nový vzorec místo starého, zjistíme, že doporučený maximální počet úderů srdce za minutu pro mladší lidi poněkud poklesne a pro starší lidi poněkud vzroste."

Od jakého věku vzroste doporučená maximální tepová frekvence při použití nového vzorce? Zapiš svůj postup.

Otázka 2:

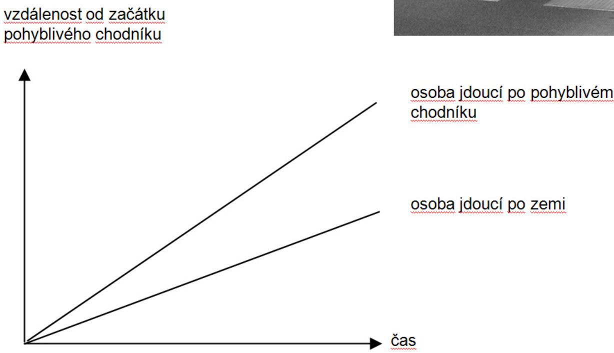
Vzorec *doporučená maximální tepová frekvence = 208 – (0,7 × věk)* se užívá také k určení toho, kdy je tělesné cvičení nejúčinnější. Výzkum prokázal, že cvičení je nejúčinnější, když tepová frekvence činí asi 80 % doporučené maximální frekvence.

Sestav vzorec pro výpočet tepové frekvence při největší účinnosti cvičení vyjádřený pomocí věku.

POHYBLIVÝ CHODNÍK

Na fotografii vpravo vidíme pohyblivý chodník.

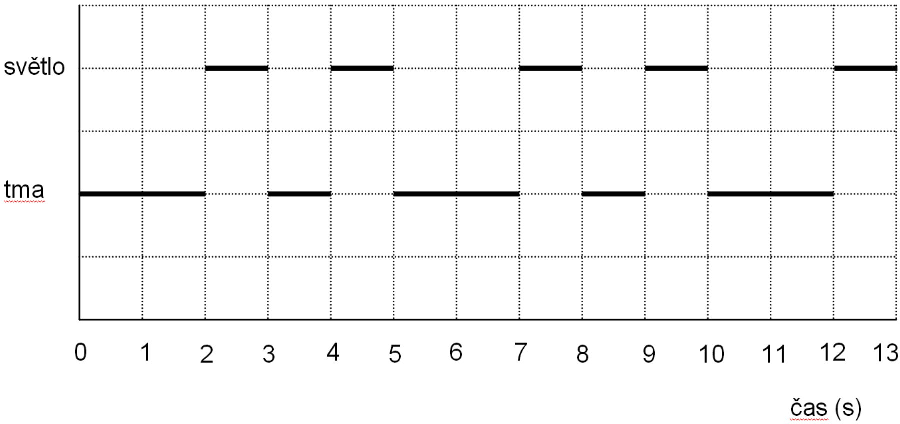
Graf závislosti dráhy na čase porovnává chůzi po pohyblivém chodníku s chůzí po zemi podél pohyblivého chodníku.



Předpokládejme, že obě osoby zachycené v grafu jdou stejně rychle. Doplň do grafu přímku, která znázorňuje závislost vzdálenosti na čase u osoby, která na pohyblivém chodníku stojí.

MAJÁK

Majáky jsou věže, které mají ve své nejhornější části světlomet. Majáky pomáhají lodím plujícím v blízkosti pobřeží orientovat se na moři za noci.
Světlomet vysílá záblesky v pravidelném, stále se opakujícím rytmu. Každý maják má svůj signál.
Následující obrázek znázorňuje signál jednoho majáku. Záblesky se střídají s chvilkami tmy.



Rytmus je pravidelný. Po určité době se signál opakuje. Doba, za niž proběhne jeden úplný signál, než se začne opakovat, se nazývá perioda. Zjistíme-li periodu, snadno prodloužíme graf na další sekundy, minuty nebo i hodiny.

Otázka 1:

Který z následujících údajů by mohl představovat periodu signálu tohoto majáku?

A. 2 sekundy
B. 3 sekundy
C. 5 sekund
D. 12 sekund

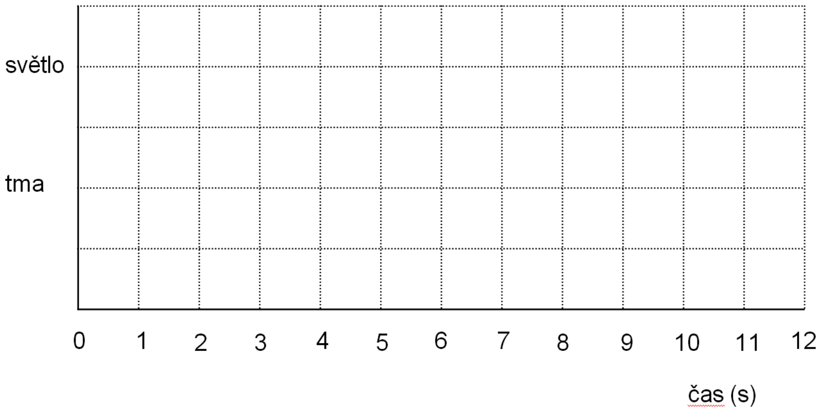
Otázka 2:

Kolik sekund vysílá maják světelné záblesky v rozmezí jedné minuty?

A. 4 sekundy
B. 12 sekund
C. 20 sekund
D. 24 sekund

Otázka 3:

Do následujícího obrázku zakresli graf světelných záblesků majáku, který během jedné minuty vysílá světelné záblesky po dobu 30 sekund. Perioda tohoto signálu musí být 6 sekund.



www.nuv.cz

www.rvp.cz

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

NÁRODNÍ ÚSTAV
PRO VZDĚLÁVÁNÍ
divize VÚP